

Otto Niemelä

# **HARMONISEN PYSTYHERÄTTEEN KUORMITTAMAN MAANVARAISEN LAI- TERUSTUKSEN VASTEEN MÄÄRI- TYS ERI UPOTUSSYVYYKSILLÄ**

Rakennetun ympäristön tiedekunta  
Diplomityö  
Toukokuu 2019

## TIIVISTELMÄ

**OTTO NIEMELÄ:** Harmonisen pystyherätteen kuormittaman maanvaraisen laiteperustuksen vasteen määrittäminen eri upotussyvyyksillä

Tampereen yliopisto

Diplomityö, 97 sivua, 15 liitesivua

Toukokuu 2019

Rakennustekniikan diplomi-insinöörin tutkinto-ohjelma

Pääaine: Rakennesuunnittelu

Tarkastaja: professori Tim Lämsä

**Avainsanat:** laiteperustus, geodynamiikka, impedanssi, Plaxis

Laiteperustusten oikeanlaisella suunnittelulla ja toteutuksella varmistetaan laitteen asianmukainen toiminta. Laiteperustuksen liialliset värähtelyt voivat aiheuttaa haittaa perustuksen tukemalle laitteelle, ympäröiville rakenteille sekä perustuksen läheisyydessä toimiville ihmisille. Puutteellisesta laiteperustusten suunnittelusta johtuvien laitteen käyttökatkojen kustannukset nousevat nopeasti huomattaviksi. Tästä syystä laiteperustusten suunnitteluun tulee kohdistaa riittävä huomio.

Erilaisia menetelmiä laiteperustusten siirtymien laskentaan on useita lukuisista analyyttisistä menetelmistä aina eri tietokoneohjelmien käyttöön. Eri menetelmien luotettavuudessa ja nopeudessa on merkittäviä eroja. Nykyaikaisten laiteperustusten analyysimenetelmien keskeinen osa on taajuusriippuvien dynaamisten impedanssifunktioiden määrittäminen joko numeerisin tai analyyttisin menetelmin.

Työssä tutkittiin dynaamisesti kuormitetun betonisen massiivilaiteperustuksen käyttäytymistä pystysuunnassa eri upotussyvyyksillä vertaamalla Plaxis 3D-ohjelmalla sekä Gazetasin analyyttisillä yhtälöillä laskettuja perustuksen siirtymiä sekä dynaamisia impedansseja vertailututkimuksen koekuormitustuloksiin. Tarkoituksena oli selvittää, miten näiden kahden menetelmän tulokset vertautuvat todellisiin koekuormitustuloksiin ja ovatko analyyttiset kaavat riittävän luotettavia laiteperustusten suunnittelutyöhön. Lisäksi selvitettiin perustuksen upotussyvyyden vaikutusta menetelmien antamien tulosten tarkkuuteen ja dynaamisten impedanssien jäykkyys- ja vaimennusominaisuuksiin. Lopuksi tutkittiin Plaxisin kaksi- ja kolmiulotteisten mallien tulosten eroja.

Saatujen tulosten perusteella Plaxis 3D ja Gazetasin yhtälöt ennustavat täysin upotetun perustuksen amplitudit hyvällä tarkkuudella koko käytetyllä taajuuskaistalla. Pintaperustuksen ja osittain upotetun perustuksen kohdalla Gazetasin yhtälöt pääasiassa yliarvioivat vaimennusta, mutta redusoidulla sivutäyttöjen vaikutusta tulokset vastaavat hyvin vertailututkimuksen tuloksia, kun taas Plaxis 3D:n amplitudit eivät korreloi yhtä hyvin vertailututkimuksen kanssa redusoinnista huolimatta. Molemmilla menetelmillä määritettyjen dynaamisten impedanssien reaali- ja imaginääriosat täsmäsivät vertailututkimuksen kanssa parhaiten pienillä taajuuksilla eron kasvaessa taajuuden noustessa.

Plaxisin kaksiulotteinen malli aliarvioi systeemin vaimennusta kolmiulotteista mallia enemmän tutkituilla perustustapauksilla. Kuitenkin, toisin kuin kolmiulotteisen mallin tapauksessa, kaksiulotteisella mallilla päädyttiin samaan resonanssitaajuuteen kuin koetuloksissa.

## ABSTRACT

**OTTO NIEMELÄ:** Determination of the Response of Embedded Machine Foundations Subjected to Harmonic Vertical Loading

Tampere University

Master of Science Thesis, 97 pages, 15 Appendix pages

May 2019

Master's Degree Programme in Civil Engineering

Major: Structural Design

Examiner: Professor Tim Lämsivaara

**Keywords:** machine foundation, geodynamics, impedance, Plaxis

The performance of machine foundations depends on their design, manufacturing and interaction with the environment. Excessive vibration of machine foundations may endanger the satisfactory operation of the machine, harm surrounding structures and disturb the people working nearby machines. The cost of foundations is very small compared to machines. Insufficiently designed and constructed foundations may lead to shutdowns resulting in rapidly increasing costs. Due to this, the design process of machine foundations needs particular attention.

The response of machine foundations can be calculated in many ways from analytical to computer-based numerical methods. There are significant differences between the reliability and the duration of different methods. A key step in current methods of dynamic analysis is to determine the frequency-dependent dynamic impedance functions with which soil-foundation-interaction can be modelled.

In this study, the dynamic response of an embedded block-type machine foundation was investigated. The displacement amplitudes and the dynamic impedances have been calculated using Plaxis 3D and Gazetas' analytical equations. These results are compared to the results of experimental investigations of the source material. The objective of this study was to find out how the results of different methods differ from the real, experimental results, how the embedment affects the amplitudes and the impedances and are Gazetas' analytical equations usable in practical design. In addition, differences between the results of 2D- and 3D-model of Plaxis were analyzed.

According to the results, Plaxis 3D and Gazetas' equations predict amplitudes in an accurate way in case of fully embedded foundation. In case of partly embedded and surface foundation, Gazetas' equations mainly overestimate damping. However, by reducing the effect of embedment, the results correlate well with the experimental results unlike the amplitudes calculated by Plaxis. Real and imaginary part of dynamic impedances, determined by both Plaxis and Gazetas' equations correlate with the source material at low frequencies.

2D-model of Plaxis underestimates the damping of the system. However, unlike in the case of Plaxis 3D, the resonant frequency of a surface foundation corresponds with the experimental results.

## ALKUSANAT

Tämä diplomityö on tehty Pöyry Finland Oy:n toimeksiantona ja työ on osa Tampereen yliopiston rakennustekniikan diplomi-insinöörin tutkintoa.

Haluan kiittää suuresti kaikkia työssä mukana olleita, erityisesti ohjaajaani DI Janne Juutia työn aiheen ideoinnista ja aiheeseen perehdyttämisestä sekä Tampereen yliopistolta työni tarkastajia professori Tim Länsivaaraa sekä Associate Professor (tenure track) Jari Mäkistä.

Elämänvaihe, josta syvästi nautin, on tältä erää päättymässä. Itse oppiminen on kuitenkin vasta alussa.

Tampereella, 29.5.2019

Otto Niemelä

# SISÄLLYSLUETTELO

1.	JOHDANTO .....	1
1.1	Tutkimuksen tausta .....	2
1.2	Tutkimuksen tavoitteet .....	3
1.3	Tutkimuksen rajaukset ja suoritus .....	3
2.	LAITEPERUSTUKSET .....	5
2.1	Laitteiden aiheuttamat dynaamiset kuormat .....	6
2.2	Suunnittelukriteerit .....	10
2.3	Viritys .....	12
2.4	Upotettu laiteperustus .....	13
2.5	Laiteperustuksen vapausasteet .....	14
2.6	Ideaalimalli .....	15
2.7	Värähtelyn hallinta .....	16
3.	KATSAUS DYNAMIIKKAAN .....	20
3.1	Yhden vapausasteen systeemi .....	20
3.1.1	Vapaa värähtely .....	20
3.1.2	Vaimennettu vapaa värähtely .....	23
3.1.3	Vaimenematon pakkovärähtely .....	27
3.1.4	Vaimeneva pakkovärähtely .....	28
3.2	Usean vapausasteen systeemi .....	32
3.2.1	Ominaisarvo-ongelma .....	33
3.2.2	Usean vapausasteen vaimentamaton systeemi .....	34
3.2.3	Usean vapausasteen vaimennettu systeemi .....	37
3.2.4	Usean vapausasteen vaimennettu pakkovärähtely .....	38
4.	GEODYNAMIIKKA .....	39
4.1	Aaltoliike maassa .....	40
4.2	Vaimennus .....	45
4.3	Impedanssifunktiot .....	48
4.3.1	Pintaperustus .....	53
4.3.2	Upotettu perustus .....	55
5.	VERTAILUTUTKIMUKSEN KOEKUORMITUKSET .....	58
6.	NUMEERINEN MALLI PLAXIS 3D:LLA .....	62
6.1	Newmarkin menetelmä .....	62
6.2	Laskentamalli .....	63
6.3	Plaxis 2D .....	71
7.	TULOKSET JA NIIDEN TULKINTA .....	72
7.1	Perustuksen amplitudit .....	73
7.1.1	Menetelmäkohtaiset kuvaajat .....	74
7.1.2	Upotussyvyyskohtaiset kuvaajat .....	75
7.2	Perustuksen dynaamiset impedanssit .....	78
7.2.1	Reaaliosat .....	78

7.2.2	Imaginääriosat .....	81
7.3	Perustuksen ja maan kontaktin redusointi .....	83
7.4	Plaxis 3D vs. 2D .....	85
7.5	Tulosten tulkinta .....	87
7.5.1	Redusoidut arvot .....	88
7.5.2	Plaxiksen kaksi- ja kolmiulotteisen mallin erot .....	89
7.5.3	Mahdolliset virhelähteet .....	90
8.	YHTEENVETO .....	92
	LÄHTEET .....	94

LIITE A: GAZETASIN YHTÄLÖIHIN PERUSTUVA LASKENTAPOHJA

LIITE B: PLAXIS 3D:N SIIRTYMÄVASTEKUVAAJA

## LYHENTEET JA MERKINNÄT

ARF	Amplitude Reduction Factor, amplitudin vähennyskerroin
CSW-testi	Continuous Surface Wave testing, pinta-aaltojen kenttämittaustemennetelmä
FEM	Finite Element Method, elementtimennetelmä
LE-malli	Lineaarielastinen maamalli
Plaxis	Geoteknisiin analyyseihin kehitetty, elementtimennetelmään pohjautuva laskentaohjelma
SSI	Soil-Structure-Interaction, vuorovaikutus maan ja rakenteen välillä
SSSI	Structure-Soil-Structure-Interaction, vuorovaikutus maan ja useamman rakenteen systeemin välillä
FSFI	Foundation-Soil-Foundation-Interaction, vuorovaikutus perustuksen ja maan välillä

### Laiteperustukset

$e$	epäkeskisyys
$F$	ajasta riippuva dynaaminen voima, herätevoima
$F_0$	dynaamisen kuorman amplitudi, herätteen amplitudi
$G$	koneen tasapainoluokka
$H$	ojan syvyys
$l$	kiertokangen pituus
$l_1$	kiertokangen massakeskipisteen ja kiertokangen ja kammen liitospisteen välinen etäisyys
$m_r$	pyörivä massa
$m_{rec}$	kampimekanismin edestakaisin liikkuva massa
$m_{rot}$	kampimekanismin pyörivä massa
$m_1$	kammen massa
$m_2$	edestakaisin liikkuvien osien (mäntä, kammen pää) massa
$m_3$	kiertokangen massa
$P_x$	männän suuntaa vasten kohtisuora dynaaminen voima
$P_z$	männän suuntainen dynaaminen voima
$R$	ojan etäisyys värähtelylähteestä
$r$	kammen säde
$r_1$	kampiakselin massakeskipisteen ja pyörimiskeskipisteen välinen etäisyys
$S_f$	koneen käyttökerroin
$T$	siirtyvyys
$t$	aika
$\lambda_r$	Rayleigh-aallon aallonpituus
$\omega$	koneen herätekulmataajuus
$\omega_m$	pyörimisliikkeen kulmanopeus
$\omega_n$	laiteperustus-maa-systeemin ominaistaajuus

### Katsaus dynamiikkaan

$A$	värähtelyn amplitudi
$C$	vaimennusmatriisi

$c$	vaimennuskerroin
$c_{cr}$	kriittinen vaimennuskerroin
$\mathbf{F}$	voimavektori
$f_n$	ominaistaajuus
$\mathbf{K}$	jäykkyysmatriisi
$k$	jousivakio
$\tilde{\mathbf{K}}$	massanormeerattu jäykkyysmatriisi
$\mathbf{M}$	massamatriisi
$m$	massa
$\mathbf{P}$	ominaisvektorimatriisi
$\mathbf{r}_0$	alkutilan siirtymävektori moodikoordinaatistossa
$\dot{\mathbf{r}}_0$	alkutilan nopeusvektori moodikoordinaatistossa
$\mathbf{S}$	ominaismuotomatriisi
$T_n$	ominaisvärähdysaika
$\mathbf{v}$	ominaisvektori
$v_0$	alkunopeus
$X$	vasteen amplitudi pakkovärähtelyn yksittäisratkaisulle
$X_{max}$	vaimenevan pakkovärähtelyn maksimivahvistuksen amplitudi
$X_{res}$	resonanssivahvistuksen amplitudi
$x$	siirtymä
$\mathbf{x}$	siirtymävektori
$\dot{x}$	nopeus
$\dot{\mathbf{x}}$	nopeusvektori
$\ddot{x}$	kiihtyvyys
$\ddot{\mathbf{x}}$	kiihtyvyysvektori
$x_0$	alkuasema
$\mathbf{x}_0$	alkutilan siirtymävektori
$\dot{\mathbf{x}}_0$	alkutilan nopeusvektori
$x_p$	pakkovärähtelyn yksittäisratkaisu
$\Lambda$	spektrimatriisi
$\Phi$	värähtelyn vaihekulma
$\theta$	vaihekulma pakkovärähtelyn yksittäisratkaisulle
$\lambda$	ominaisarvo
$\xi$	suhteellinen vaimennuskerroin
$\omega_d$	vaimennettu ominaiskulmataajuus
$\omega_n$	ominaiskulmataajuus

## Geodynamiikka

$A_b$	perustuksen ja maan välinen kontaktipinta-ala
$A_w$	perustuksen pystyseiniä ja maan välinen kontaktipinta-ala
$A_{w.x}$	x-akselin suuntaisten pystyseiniä ja maan välinen kontaktipinta-ala
$A_{w.y}$	y-akselin suuntaisten pystyseiniä ja maan välinen kontaktipinta-ala
$B$	perustuksen ympäröivän, suorakaiteen muotoisen alueen lyhyemmän sivumitan puolikas
$C$	kokonaisvaimennuskerroin
$C_{rad}$	säteilyvaimennuskerroin
$C_z$	vaimennuskerroin pystysuunnassa
$D$	perustuksen alapinnan ja maanpinnan välinen korkeus



$d$	keskimääräinen pystyseiniä korkeus, jolla hyvä maakontakti
$d_{ij}$	vasteen vaihekulma
$E$	kimmomoduuli
$F_{max}$	voiman amplitudi
$F_z$	pystysuuntainen harmoninen voima
$G$	leikkausjäykkyys eli leikkausmoduuli
$G_0$	leikkausmoduulin tangenttiarvo
$H$	perustuksen korkeus
$h$	perustuksen tehokkaiden pystypintojen painopisteen etäisyys maanpinnasta
$I_{bx}$	perustuksen ja maan välisen kontaktipinta-alan neliömomentti x-akselin ympäri
$I_{by}$	perustuksen ja maan välisen kontaktipinta-alan neliömomentti y-akselin ympäri
$I_{w.x}$	x-akselin suuntaisten sivuseiniä neliömomenttien summa niiden perustustasossa sijaitsevan, x-akselin suuntaisen akselin ympäri
$I_{w.y}$	y-akselin suuntaisten sivuseiniä neliömomenttien summa niiden perustustasossa sijaitsevan, y-akselin suuntaisen akselin ympäri
$Im$	vasteen imaginääriosia
$J_b$	perustuksen ja maan välisen kontaktipinta-alan polaarinen neliömomentti z-akselin ympäri
$J_{w.x}$	x-akselin suuntaisten sivuseiniä polaaristen neliömomenttien summa perustustasossa sijaitsevan, y-akselin suuntaisen akselin ympäri
$J_{w.y}$	y-akselin suuntaisten sivuseiniä polaaristen neliömomenttien summa perustustasossa sijaitsevan, x-akselin suuntaisen akselin ympäri
$J_x$	perustuksen hitausmomentti x-akselin ympäri
$J_y$	perustuksen hitausmomentti y-akselin ympäri
$K$	staattinen jäykkyys
$\mathbf{K}$	staattinen jäykkyysmatriisi
$\tilde{\mathbf{K}}$	dynaaminen impedanssimatriisi
$k$	dynaaminen jäykkyyskerroin
$\tilde{K}_{rx}$	x-akselin ympäri tapahtuvan värähtelyn dynaaminen impedanssi
$\tilde{K}_{ry}$	y-akselin ympäri tapahtuvan värähtelyn dynaaminen impedanssi
$\tilde{K}_x$	x-akselin suuntaisen värähtelyn dynaaminen impedanssi
$\tilde{K}_{xry}$	x-akselin suuntaisen ja y-akselin ympäri tapahtuvan värähtelyn kytetty dynaaminen impedanssi
$\tilde{K}_y$	y-akselin suuntaisen värähtelyn dynaaminen impedanssi
$\tilde{K}_{yrx}$	y-akselin suuntaisen ja x-akselin ympäri tapahtuvan värähtelyn kytetty dynaaminen impedanssi
$\tilde{K}_z$	dynaaminen impedanssi pystysuunnassa
$\bar{K}_z$	dynaaminen jäykkyys pystysuunnassa
$L$	perustuksen ympäröivän, suorakaiteen muotoisen alueen pidemmän sivumitan puolikas
$M_{max}$	momentin amplitudi
$P_z$	maan tukireaktio pystysuunnassa
$\bar{P}_z$	maan pystysuuntaisen tukireaktion kompleksimuotoinen esitys

$Re$	vasteen reaaliiosa
$S$	Hystereesisilmukan pinta-ala
$S_D$	Hystereesisilmukan maksimienergiaa kuvaavan kolmion pinta-ala
$u$	siirtymä
$u_F$	siirtymä voima vaikutuksesta
$u_M$	siirtymä momentin vaikutuksesta
$u_z$	siirtymä pystysuunnassa
$\bar{u}_z$	pystysuuntaisen siirtymän kompleksimuotoinen esitys
$\nu$	Poissonin luku
$V_{La}$	Lysmerin analogian mukainen aallon nopeus
$V_p$	puristusaallon nopeus
$V_s$	leikkausaallon nopeus
$\tilde{X}$	kompleksinen siirtymämatriisi
$\alpha$	Rayleigh-vaimennuksen parametri
$\beta$	Rayleigh-vaimennuksen parametri
$\alpha_0$	dimensioton taajuus
$\beta_0$	materiaalivaimennuskerroin
$\Delta t_{ij}$	vasteen ja herätteen amplitudien välinen aikaero
$\rho$	maan tiheys
$\varphi$	kiertymä
$\varphi_F$	kiertymä voiman vaikutuksesta
$\varphi_M$	kiertymä momentin vaikutuksesta

#### Numeerinen laskentamalli Plaxis 3D:lla

$C_1$	relaksaatiokerroin
$C_2$	relaksaatiokerroin
$c_i$	rajapinnan redusoitu koheesio
$c_{soil}$	ympäröivän maan koheesio
$\hat{F}$	kuorman suuruus
$k$	elementtiverkon kokoa kuvaava kerroin
$l_{min}$	elementin kahden pisteen minimiväli
$\hat{M}$	amplitudikerroin
$m$	tallennettavien laskentapisteiden määrä
$n$	ala-askelten määrä
$R_{inter}$	lujuusvähennyskerroin
$R_{inter,residual}$	jäännöslujuuskerroin
$r_e$	suhteellinen elementtikokokerroin
$u^t$	siirtymä ajanhetkellä $t$
$\dot{u}^t$	nopeus ajanhetkellä $t$
$\ddot{u}^t$	kiihtyvyys ajanhetkellä $t$
$\dot{u}_x$	normaalipartikkelin nopeus
$\dot{u}_y$	leikkauspartikkelin nopeus
$u^{t+\delta t}$	siirtymä ajanhetkellä $t + \Delta t$
$\dot{u}^{t+\delta t}$	nopeus ajanhetkellä $t + \Delta t$
$\ddot{u}^{t+\delta t}$	kiihtyvyys ajanhetkellä $t + \Delta t$
$x_{max}$	laskentamallin geometrian maksimimitta x-suunnassa
$x_{min}$	laskentamallin geometrian minimimitta x-suunnassa
$y_{max}$	laskentamallin geometrian maksimimitta y-suunnassa

$y_{min}$	laskentamallin geometrian minimimitta y-suunnassa
$z_{max}$	laskentamallin geometrian maksimimitta z-suunnassa
$z_{min}$	laskentamallin geometrian minimimitta z-suunnassa
$\Delta l$	keskimääräinen elementtiverkon elementtikoko
$\Delta t$	kuormituksen kesto
$\Delta t_{critical}$	kriittinen aika-askel
$\alpha$	Newmarkin menetelmän aikaintegrointikerroin
$\beta$	Newmarkin menetelmän aikaintegrointikerroin
$\delta t$	aika-askel
$\lambda$	herätteen aallonpituus
$\sigma_n$	normaalijännitys
$\tau$	leikkausjännitys
$\varphi_i$	rajapinnan redusoitu kitkakulma
$\varphi_{soil}$	ympäröivän maan kitkakulma
$\varphi_0$	alkuvaihekulma

# 1. JOHDANTO

Laiteperustusten suunnittelu vaatii erityishuomiota, koska perustuksen ja sen päällä olevien laitteiden massasta aiheutuvan staattisen kuorman lisäksi suunnittelussa on huomioitava dynaamiset kuormat, jotka siirtyvät perustuksen kautta maahan. Dynaamisten kuormien suuruus on suhteessa pieni verrattuna staattisiin kuormiin, mutta dynaaminen kuormitus toistuu jatkuvasti hyvin pitkällä aikavälillä. Näin ollen maan on toimittava pääasiallisesti elastisesti tai muuten maan muodonmuutos kasvaisi jokaisen kuormitus syklin aikana. (Prakash & Puri 2006, s. 1.)

Laiteperustusten suunnitteluun on syytä kohdistaa riittävä panostus, sillä perustusten kustannukset ovat todella pieni osuus itse laitteiden kustannuksista. Puutteellisesti toteutettu perustus saattaa aiheuttaa laitteen häiriöitä ja käyttökatkoja, jolloin kokonaiskustannukset ylittävät moninkertaisesti huolella suunnitellun ja rakennetun perustuksen vaatiman investoinnin. (Bhatia 2008, s. 1-3.)

Lähtökohtana laiteperustusten suunnittelussa on rajoittaa perustusten värähtelyamplitudeja siten, että ne eivät haittaa koneen toimintaa tai häiritse koneen läheisyydessä toimivia ihmisiä. Onnistunut laiteperustusten suunnittelu edellyttää dynaamisesti kuormitetun perustuksen tarkempaa analysointia. Analyysiä voidaan myös hyödyntää olemassa olevan laiteperustuksen ongelmien määrittämiseen ja ratkaisemiseen, kun perustuksen liialliset liikkeet estävät koneen kunnollisen toiminnan. Analyysin lisäksi laiteperustusten suunnittelu sisältää tavallisesti toimintavaatimusten asettamisen, dynaamisten kuormien määrittämisen, maan profiilin määrittämisen sekä maan kriittisten ominaisuuksien arvioimisen. (Gazetas 1983, s. 2.)

Kun laiteperustukseen kohdistuu dynaaminen kuormitus, laiteperustus värähtelee tavalla, joka riippuu perustusta tukevan maan ominaisuuksista, perustuksen ja päällysrakenteen geometriasta sekä dynaamisen herätteen luonteesta. Laiteperustusten suunnittelussa perustusten värähtely määritetään vasteanalyysin avulla, jossa olennaisena osana ovat dynaamiset kertoimet, joilla kuvataan maan antamaa joustavaa tukea perustukselle. (Gazetas 1991a, s. 553.)

Vuosien saatossa laiteperustusten analysointiin on kehitetty lukuisia menetelmiä, yksinkertaisista aina hyvin monimutkaisiin. Aikoinaan laiteperustukset tyypillisesti mitoitettiin ilman minkäänlaista tarkempaa analyysiä perustuen erilaisiin peukalosääntöihin. Esimerkkinä tällaisesta säännöstä on massiivisen laiteperustuksen massan määrittäminen 3–5 kertaa suuremmaksi kuin itse koneella. (Gazetas 1983, s. 3.) Värähtelevän perustuk-

sen käyttäytymisen tarkkailuun perustuvissa empiirisissä malleissa välittömästi perustuksen alla olevan maan katsottiin värähtelevän perustuksen mukana. Muut aikaisessa vaiheessa käytetyt menetelmät olivat yksinkertainen massa-jousi-vaimennin -malli sekä Winklerin malli. Lamb (Lamb 1904) esitti ensimmäisenä elastisen puoliavaruuden teorian, joka ottaa huomioon värähtelevän perustuksen synnyttämien aaltojen leviämisen vaikutuksen. Tätä teoriaa pidettiin tieteellisempänä lähestymistapana värähtelevien perustusten ongelmaan ja se syrjäytti aiemmin käytetyt empiiriset menetelmät. Elastisen puoliavaruuden teoria voidaan yksinkertaistaa yhden vapausasteen vaimennetuksi systeemiksi, joka on taajuudesta riippumaton tai riippuvainen. Nykyään perustuksen ja maan välistä dynaamista vuorovaikutusta kuvaavien dynaamisten impedanssifunktioiden määrittäminen perustussysteemille on suosittu tapa suunnittelijoiden keskuudessa. Analyytisten menetelmien lisäksi impedanssit voidaan määrittää kenttämittausten avulla, jolloin ne kuvaavat maan ja perustuksen välistä todellista käyttäytymistä. Lisäksi tänä päivänä laiteperustusten suunnittelussa hyödynnetään elementtimenetelmään perustuvia numeerisia laskentaohjelmia, joilla on kuitenkin myös omat rajoituksensa. (Mbawala 2015, s. 2-36.)

Työssä analysoidaan dynaamisesti kuormitettua maanvaraista, upotettua laiteperustusta sekä elementtimenetelmään (FEM) perustuvalla Plaxis 3D-ohjelmalla että Gazetasin analyttisten yhtälöiden avulla. Plaxiksella maan käyttäytymistä pystytään simuloimaan erilaisten maamallien avulla ja sen dynaaminen moduuli hyödyntää numeerista aikaintegrointia. Gazetasin yhtälöt perustuvat taajuusriippuvaisten dynaamisten impedanssifunktioiden määrittämiseen. Tuloksissa molemmilla menetelmillä lasketut perustuksen siirtymäamplitudit sekä dynaamisten impedanssien reaali- ja imaginääriosat esitetään taajuuskaistoittain eri upotussyvyyksillä. Jotta käytettyjen menetelmien tulosten oikeellisuudesta voidaan varmistua, tuloksia on verrattu kirjallisuudesta saataviin koekuormitustuloksiin. Lisäksi Plaxiksen kolmiulotteisen mallin tuloksia verrataan muutamassa perustustapauksessa yksinkertaisemman, kaksiulotteisen mallin tuloksiin.

## 1.1 Tutkimuksen tausta

Laiteperustusten suunnittelu on vaativa rakennustekniikan osa, sillä se yhdistelee niin perinteistä rakennesuunnittelua kuin pohjarakentamista ja geodynamiikkaa. Suomessa rakennesuunnittelun opetus keskittyy suurelta osin staattisiin kuormituksiin ja rakenteiden dynaaminen toiminta jää useimmiten vähemmälle huomiolle. Lisäksi koneen toiminnasta ovat vastuussa sekä laiteperustuksen suunnitellut rakennesuunnittelijat, että koneesta vastaava koneensuunnittelija, joiden tulisi toimia suunnitteluprojektissa yhteistyössä. Pöyryn rakenneosasto on keskittynyt erityisesti teollisuuden rakennesuunnitteluun, jossa laiteperustukset ovat keskeisessä osassa.

Kuten aiemmin todettiin, aikanaan laiteperustusten suunnittelu perustui peukalosääntöihin. Tämänkaltaisen lähestyminen ei huomioi lainkaan lukuisia muuttujia, kuten maan ominaisuuksia tai herätteen luonnetta, jotka vaikuttavat merkittävästi laiteperustuksen

toimintaan. Laiteperustusten parissa työskentelevien suunnittelijoiden tulisikin tuntea tarkemmin maan ja perustuksen yhteistoiminta kyetäkseen suunnittelemaan toimiva kokonaisuus. Tämä vaatii ymmärrystä laiteperustusten erilaisista analyysimenetelmistä.

## 1.2 Tutkimuksen tavoitteet

Tässä diplomityössä pyritään antamaan kattava ja riittävän selkeä kuvaus laiteperustusten toiminnasta ja suunnittelusta, laiteperustuksiin liittyvästä dynamiikasta ja geodynamiikasta sekä impedanssifunktioiden merkityksestä laiteperustusten analyysissä. Pyrkimyksenä on, että lukija saa käsityksen merkittävimmistä laiteperustusten suunnitteluun vaikuttavista tekijöistä sekä käytettyjen analyysimenetelmien hyödynnettävyydestä.

Tarkoituksena on tarkastella maanvaraisten laiteperustusten dynaamista käyttäytymistä numeerisella sekä analyyttisellä menetelmällä ja vertailla näitä tuloksia kirjallisuudesta löytyviin koekuormituksiin. Käytännössä tämä tarkoittaa laiteperustusten siirtymäamplitudien sekä dynaamisten impedanssien määrittämistä ja niiden vertaamista koekuormituksissa mitattuihin arvoihin. Tuloksista pyritään tulkitsemaan, milloin analyysimenetelmät ovat riittävän luotettavia ja missä määrin niitä voidaan hyödyntää käytännön suunnittelussa. Keskeisessä osassa ovat dynaamiset impedanssifunktiot, joiden reaali- ja imaginääriosia kuvaavat perustus-maa-systeemin jäykkyys- ja vaimennusominaisuuksia.

Tavallisesti maanvaraiset laiteperustukset upotetaan osittain tai kokonaan maahan. Työssä tarkastellaan upotuksen vaikutusta perustuksen värähtelykäyttäytymiseen, menetelmien mallintamistarkkuuteen sekä dynaamisten impedanssien eri osiin. Lisäksi työn ohessa luodaan Gazetasin analyyttisiin yhtälöihin perustuva laskentapohja, jonka avulla suunnittelija pystyy päivittäisessä työssä vähäisellä vaivalla suorittamaan maanvaraisten laiteperustusten dynaamisen analyysin.

## 1.3 Tutkimuksen rajaukset ja suoritus

Dynaaminen analyysi työssä tehdään massiivisille, suorakaiteen muotoisille, maanvaraisille laiteperustuksille. Muun muotoisille perustuksille ei analyysia toteuteta. Myös paa-luperustukset jätetään tämän työn ulkopuolelle.

Dynaaminen heräte voi syntyä esimerkiksi maanjäristyksestä, räjähdyksestä, liikkuvasta kuormasta, aalloista tai erilaisista koneista ja laitteista. Tässä työssä tarkastelu rajataan vain laiteperustusten päällä toimiviin koneisiin (mäntäkoneet ja pyörivät koneet), jotka synnyttävät harmonisen, pystysuuntaisen herätteen. Värähtelyn rajoittamista muilla keinoin kuin dynaamisen analyysin avulla on sivuttu pintapuolisesti, mutta syvällisempi aiheen käsittely ei kuulu tämän työn rajaukseen.

Teoriaosuudessa käydään läpi laiteperustusten yleisiä suunnittelukriteerejä ja suunnitteluprosessia sekä erilaisia analyysissä hyödynnettäviä rakennemalleja, syvennyttään dynamiikan perusteisiin yhden sekä useamman vapausasteen systeemin tapauksessa sekä tutustutaan ominaisarvo-ongelmaan ja sen ratkaisemiseen moodianalyysin avulla. Lisäksi perehdytään geodynamiikan saralla aaltojen etenemiseen maassa, maan vaimennusominaisuuksiin sekä impedanssifunktioihin. Plaxiksen toimintaan ja käytettyihin laskentaasetuksiin perehdytään tarpeellisin määrin. Yhteen ohjelmaan kaiken kattavasti syventyminen vaatisi laajuutensa puolesta oman diplomityönsä.

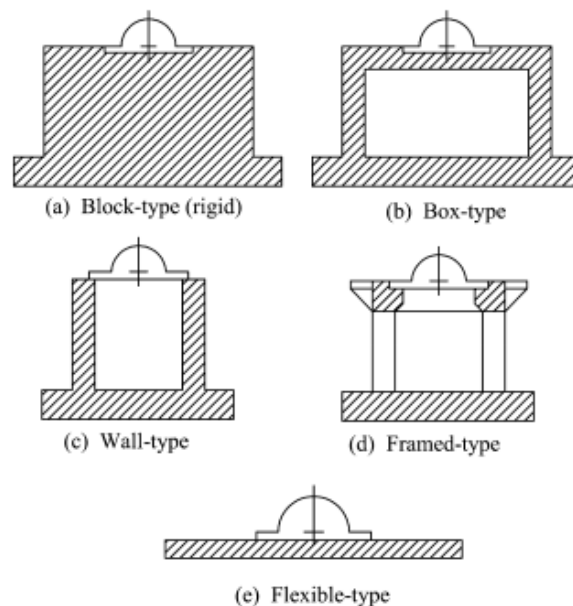
Koska maanvaraisten laiteperustusten dynaamisia koekuormituksia on esitetty tieteellisissä tutkimuksissa jonkin verran, on tarkoituksenmukaista hyödyntää näitä tutkimuksia, että voidaan varmistua tässä työssä saatavien tulosten oikeellisuudesta. Valitun koekuormituksen data määrittelee laskentamalleissa käytetyt lähtötiedot, kuten perustuksen koon ja upotussyvyyydet sekä maaparametrit.

Tutkimustavoista perinteiset tutkimusmenetelmät, kvalitatiivinen ja kvantitatiivinen menetelmä liittyvät empiiriseen tutkimukseen, johon tätä tutkimusta ei voida lukea. Henkilöhaastatteluja ei tämän tutkimuksen puitteissa tehdä. Tutkimus voitaneen laskea teoreettisen tutkimuksen ja kirjallisuustutkimuksen yhdistelmäksi. Työn viitekehys liittyy kirjallisuustutkimukseen ja laskennallisesti kuvattavat mallit katsotaan teoreettiseksi tutkimukseksi.

## 2. LAITEPERUSTUKSET

Laiteperustukset toimivat erilaisten koneiden, laitteiden ja muun raskaan kaluston perustuksina ja ne on suunniteltu huomioiden laitteista aiheutuvat dynaamiset kuormitukset. Laiteperustukset jaetaan eri tyyppeihin perustuen niiden muotoon. Jaottelu on esitetty kuvassa 1 ja eri tyyppejä ovat:

- a) massiivinen perustus
- b) laatikkomainen perustus
- c) seinämäinen perustus
- d) kehämäinen perustus
- e) taipuisa perustus.



**Kuva 1.** Tyypillisiä laiteperustustyyppejä (Rao 2011, s. 394).

Massiivinen laiteperustus on näistä yleisin. Niitä käytetään yleisesti kaiken tyyppisten laitteiden kanssa riippumatta laitteiden käyntinopeudesta. Massiiviperustusten suuri massa tarkoittaa systeemin pienempää ominaistaajuutta. Mikäli halutaan suhteessa kevyempi laiteperustus, vaihtoehtona on laatikkomainen perustus, jolloin ominaistaajuus kasvaa suhteessa massiiviseen perustukseen. Tyypillisin laiteperustuksen valmistusmateriaali on betoni, mutta myös tiili ja teräs (kehämäisten perustusten tapauksessa) ovat mahdollisia. Teräksen ongelma laiteperuksissa on sen betonia haastavampi värähtelyn hallinta, sillä ominaistaajuudet ovat matalia ja perustus hyvin matalaviritteinen. Betonin osalta vaihtoehtoina ovat raudoittamaton, raudoitettu tai esijännitetty perustus. (Prakash & Puri 2006, s. 2; Bhatia 2008, s. 1-10.)



Dynaamisia voimia alhaisella nopeudella aiheuttavien laitteiden kohdalla käytetään tavallisesti massiivisia perustuksia. Kehämäisiä laiteperustuksia käytetään yleensä turbo-generaattorien ja muiden vastaavien korkeataajuuslaitteiden tapauksessa. Kehämäisten perustusten etu syntyy tilan- ja materiaalin säästöstä, laitteen eri osien paremmasta saavutettavuudesta huollon kannalta sekä pienemmästä taipumuksesta halkeilla painuman ja lämpötilamuutosten johdosta. (Srinivasulu & Vaidyanathan 1976, s. 135.) Tässä tutkimuksessa keskitytään betonista valmistettuihin, massiivisiin laiteperustuksiin.

## 2.1 Laitteiden aiheuttamat dynaamiset kuormat

Erilaiset koneet ja laitteet voivat aiheuttaa toisistaan poikkeavia jaksollisia voimia. Laitteet voidaan jaotella ainakin käyntinopeuden (taajuuden) ja niiden synnyttämien voimien mukaan. Käyntinopeuksien mukainen luokitus vaihtelee jonkin verran lähteestä riippuen. Bhatia (Bhatia 2008, s. 1-8) on esittänyt seuraavaa jaottelua:

1. hyvin matalataajuiset laitteet (0 r/min – 100 r/min)
2. matalataajuiset laitteet (1000 r/min – 1500 r/min)
3. keskitaajuiset laitteet (1500 r/min – 3000 r/min)
4. korkeataajuiset laitteet ( $\geq 3000$  r/min).

Mitä nopeampi koneen käyntitaajuus on, sitä tiukemmat tasapainotusvaatimukset ja amplitudirajat. Prakash ja Puri (Prakash & Puri 2006, s. 1) esittävät koneiden jakamisen kolmeen eri luokkaan niiden synnyttämien jaksollisten voimien mukaan:

1. Mäntäkoneet: Koneet, joiden edestakainen liike tuottaa jaksollisia, epäkeskisiä voimia, kuten höyrykoneet, pumput ja polttomootorilla varustetut laitteet. Herätteen voidaan katsoa olevan sinimuotoinen ja tyypillinen käyntinopeus on tavallisesti vähemmän kuin 600 r/min.

2. Iskumaiset koneet: Nämä koneet synnyttävät kuormaa iskuittain, jolloin dynaamisessa kuormassa on piikki hyvin lyhyellä aikavälillä, jonka jälkeen kuormitus katoaa täysin. Tyypillinen käyntinopeus vaihtelee välillä 60 – 150 iskua minuutissa.

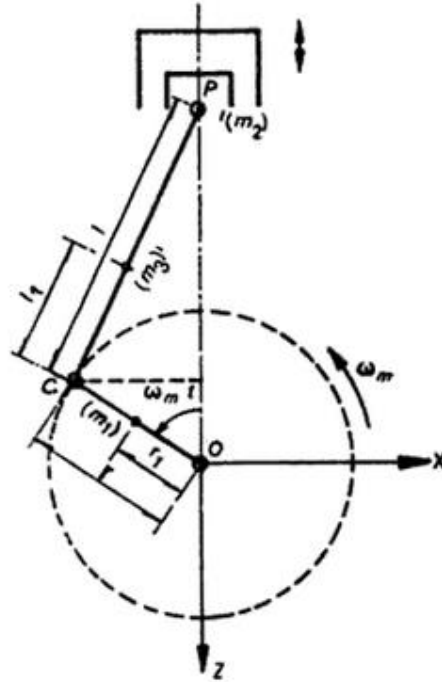
3. Pyörivät koneet: Korkealla kierrosnopeudella käyvät koneet, kuten turbiinit, keskipakopumput, turbogeneraattorit ja kompressorit, joissa pyörivänä osina ovat tyypillisesti juoksupyörät tai roottorit.

Mäntäkoneiden edestakainen liike synnyttää edestakaisia voimia. Kampimekanismi muuttaa edestakaisen liikkeen pyöriväksi liikkeeksi ja päinvastoin. Yksisylinterisen moottorin yksinkertainen kampimekanismi on esitetty kuvassa 2. Se koostuu sylinterin sisällä liikkuvasta männästä, pisteen *O* ympäri pyörivästä kammesta ja mäntään pisteessä *P* ja kampiakseliin pisteessä *C* liitetystä kiertokangesta. Piste *C* seuraa ympyränmuotoista rataa, samalla kun pisteen *P* liike on lineaarista. Tällöin kiertokangen pisteet seuraavat elliptistä rataa. (Srinivasulu & Vaidyanathan 1976, s. 4–6.)

Mäntäkoneiden männän suuntainen dynaaminen voima (z-suunta) ja sitä vasten kohtisuora voima (x-suunta) voidaan kirjoittaa yhtälömuodossa

$$P_z = (m_{rec} + m_{rot})r\omega_m^2 \cos \omega_m t + m_{rec} \frac{r^2 \omega_m^2}{l} \cos 2\omega_m t \quad (2.1)$$

$$P_x = m_{rot} r \omega_m^2 \sin \omega_m t. \quad (2.2)$$



**Kuva 2.** Yksinkertainen kampimekanismi.

Yhtälöissä (2.1) ja (2.2)  $r$  on kammien säde,  $\omega_m$  kulmanopeus,  $t$  aika,  $m_{rec} = m_2 + m_3(\frac{l_1}{l})$  edestakaisin liikkuva massa ja  $m_{rot} = \frac{r_1 m_1}{r} + (1 - \frac{l_1}{l})m_3$  on pyörivä massa. Eri osien massojen ja pituuksien tunnuksat ovat kuvan 2 mukaiset.

Mäntäkoneiden aiheuttamaa epätasapainoa ei pystytä välttämään tasapainotuksella. Kuitenkin monisylinterimoottorien kohdalla sylinterit voidaan järjestää siten, että epätasapainosta syntyvät voimat saadaan minimoitua. Mäntäkoneiden kanssa käytetään tyypillisesti massiivisia laiteperustuksia.

Pyörivien koneiden tapauksessa tasapainotuksella voidaan päästä epätasapainosta eroon, vaikka käytännössä sitä esiintyy aina jonkin verran. Epätasapaino tarkoittaa sitä, että pyörimisakseli ei kohtaa systeemin massakeskipisteen kanssa ja pyöriminen on epäkeskistä. Suurilla pyörimisnopeuksilla käyvien koneiden kohdalla pienikin epäkeskisyyys voi synnyttää suuria dynaamisia voimia. Pyörivien koneiden aiheuttama dynaaminen voima voidaan esittää muodossa

$$F(t) = m_r e \omega^2 \sin \omega t, \quad (2.3)$$

missä  $m_r$  on pyörivä massa,  $e$  pyörivän massan epäkeskisyys ja  $\omega$  laitteen kulmataajuus.

Ajan mittaan koneen tasapaino huononee. Asetetun rajan ylittyessä hälytysjärjestelmän tulee antaa varoitus koneen hoitajalle. Tähän tasapainotilaan saakka asetettujen värähtelytason vaatimusten tulee täyttyä. Onnettomuustilanteessa valvontajärjestelmän tulee varmistaa koneen pysähtyminen ja rakenteen on oltava riittävän luja kestääkseen dynaamiset voimat. (SFS-EN 1991-3, 2016s. 62–64.)

Iskumaiset koneet, kuten puristimet ja prässit, lävistyskoneet sekä konevasarat tuottavat usein jaksottaisia, suuria dynaamisia voimia. Näiden koneiden tasapainotuksella voidaan vähentää jäännösvoimia merkittävästi. Iskumaisen koneen tyypistä riippuen se saattaa sisältää myös oskilloivia osia. Näiden koneiden synnyttämiä jaksollisia huippuja seuraa törmäyskappaleen vapaan värähtelyn vaimeneminen. Koska käyntitaajuudet voivat olla melko suuria, täydellistä värähtelyn vaimennusta iskujen välissä ei välttämättä aina voida saavuttaa. Muun muassa konevasaroiden kuorma-aika-funktio on harvoin jaksollinen ja funktion tarkka muoto riippuu koneen käyttöasetuksista sekä prosessoidun materiaalin ominaisuuksista. (Bachmann & Ammann 1987, s. 53.)

Värähtelyn vaikutukset eivät kvalitatiivisesti riipu siitä, ovatko ne mäntäkoneiden, iskumaisten koneiden vai pyörivien koneiden synnyttämiä. Värähtelyn vaikutusten vakavuus riippuu pääasiassa värähtelyn amplitudista ja taajuudesta. Mäntäkoneiden ja pyörivien koneiden aiheuttama värähtelyliike on syiden ja seurausten osalta enemmän tai vähemmän samankaltaista, jolloin keinot niiden värähtelyn rajoittamiseen ovat samanlaisia. Iskumaisten koneiden värähtely pohjimmiltaan poikkeaa näistä ja näiden värähtelyjen rajoittamiseen tarvitaan usein erikoiskeinoja, joita ei tässä työssä eritellä tarkemmin.

Koneen valmistajan edellytetään toimittavan tiedot eri mitoitusilanteissa vaikuttavista staattisista sekä dynaamisista kuormista. Kuormakaavioiden lisäksi valmistajan edellytetään toimittavan muun muassa kokoonpanopiirustukset sekä nopeuksia, massoja ja tasapainotusta koskevia tietoja. Jos koneen valmistaja ei esitä suoraan dynaamista kuormaa, se voidaan laskea yhtälön (2.3) avulla, kun epäkeskisyys tunnetaan. Lisäksi tällä tavoin epäkeskisyyden kautta dynaamisen kuorman amplitudia  $F_0$  (2.4) määritettäessä otetaan huomioon käyttökerroin  $S_f$ , joka huomioi laitteen elinkaaren aikana lisääntyvän epäkeskisyyden. (Lee, J. P. et al. 2004, s. 10; SFS-EN 1991-3, 2016, s. 62.)

$$F_0 = m_r e \omega^2 S_f. \quad (2.4)$$

Käyttökertoimen suuruus on tyypillisesti 2 tai enemmän.

Tarvittaessa laitteen dynaaminen kuorma voidaan laskea koneen tasapainoluokan avulla ISO 21940-11-standardin (SFS-ISO 21940-11, 2017, s. 12) mukaisesti (korvannut vanhan ISO 1940-standardin). Tasapainoluokkia eri laitetypyeille on esitetty oheisessa taulukossa. Riippuen tapauksesta, yhtä luokkaa matalampaa tai korkeampaa tasapainoluokkaa voidaan käyttää.

**Taulukko 1.** *Laitetyyppien tasapainoluokkia.*

Tasapainoluokka G	$e\omega$ [mm/s]	Esimerkkejä koneistotyypeistä
G 4000	4000	Suurten, hitaiden meridieselmoottorien kampikoneistot, tasapainottamaton
G 1600	1600	Suurten, hitaiden meridieselmoottorien kampikoneistot, tasapainotettu
G 630	630	Joustavat kampikoneistot, tasapainottamaton
G 250	250	Jäykät kampikoneistot, tasapainottamaton
G 100	100	Autojen, kuorma-autojen ja veturien mäntämoottorit
G 40	40	Joustavat kampikoneistot, tasapainotettu
G 16	16	Maatalouskoneet Jäykät kampikoneistot, tasapainotettu Murskaimet Vetoakselit
G 6.3	6.3	Lentokoneiden kaasuturbiinit Sentrifugit Sähkämoottorit ja generaattorit, maksiminopeus 950 r/min asti Puhaltimet Paperikoneet Pumput Prosessilaitosten koneistot Turboahtimet Vesiturbiinit Työstökoneet Koneistot, yleinen
G 2.5	2.5	Kompressorit Sähkämoottorit ja generaattorit, maksiminopeus yli 950 r/min Kaasu- ja höyryturbiinit
G 1	1	Hiomakoneiden koneistot
G 0.4	0.4	Gyroskoopit Tarkkuuskoneiden koneistot

Tasapainoluokat mahdollistavat tyypillisten laitteiden tasapainovaatimusten luokittelun ja sallittujen epäkeskisyyksien laskemisen. Kokemusten mukaan tasapainoluokat yleensä takaavat laitteen tyydyttävän toiminnan. Tasapainoluokka  $G$  määritellään tulon  $e\omega$  suuruutena, yksikkönä millimetriä sekuntia kohti. Esimerkiksi, jos  $e\omega = 6,3$  mm/s, tasapainoluokka on G 6.3. Eri tasapainoluokat on erotettu toisistaan kertoimella 2,5. Tasapainoluokkien kautta dynaamista kuormaa määritettäessä yhtälö (2.4) voidaan nyt esittää muodossa

$$F_0 = m_r G \omega S_f. \quad (2.5)$$

Korkeammilla nopeuksilla roottori pitää tasapainottaa paremmin kuin alhaisemmillä nopeuksilla, jotta se täyttää tasapainoluokkien kriteerit.

## 2.2 Suunnittelukriteerit

Staattisten kuormien osalta laiteperustusten varmuus leikkausmurtoa vastaan tulisi olla riittävän suuri ja perustukset eivät saisi painua liiallisesti. Dynaamisten kuormien osalta suunnittelukriteerit ovat monisysteemimmät. Laiteperustusten suunnittelussa tulisi noudattaa alla eriteltyjä ehtoja (Srinivasulu & Vaidyanathan 1976, s. 2-3; Prakash & Puri 2006s. 3; Rao 2011, s. 394–395; SFS-EN 1991-3, 2016, s. 62).

1. Resonanssia on vältettävä eli laiteperustus-maa-systeemin ominaistajuus ei saa vastata koneen herätetäajuutta. Systeemin ominaistajuuden on oltava määritetyn resonanssialueen ulkopuolella. Tämä kriteeri voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{\omega}{\omega_n} \leq 0,5 \text{ tai } \frac{\omega}{\omega_n} \geq 2,0, \quad (2.6)$$

missä  $\omega$  on koneen kulmataajuus ja  $\omega_n$  on systeemin ominaistajuus. Käytännössä ehto (2.6) tarkoittaa, että taajuuksien suhde on oltava 0,5 tai pienempi, kun käyntitaajuus on ominaistajuutta pienempi, ja 2,0 tai suurempi, kun käyntitaajuus on ominaistajuutta suurempi.

2. Siirtymän, nopeuden ja kiihtyvyyden amplitudit käyntitaajuuksilla eivät saa ylittää raja-arvoja, jotka koneen valmistaja tavallisesti määrittelee.

3. Laiteperustus-maa-systeemin ominaistajuus ei saa olla koneen käyntitaajuuden monikerta, jotta vältetään resonanssi korkeammilla yläalueilla.

4. Värähtely ei saa haitata koneen läheisyydessä työskenteleviä henkilöitä tai vahingoittaa muita laitteita.

5. Laiteperustuksen ja koneen yhteisen painopisteen tulisi olla samalla vertikaalilinjalla kuin maapohjan kanssa kosketuksissa olevan perustuksen keskipiste. Painopiste ei saa poiketa yli 5 % kosketuspinnan sivun pituudesta. Pystysuunnassa painopisteen tulisi olla niin kaukana perustustason painopisteestä kuin mahdollista.

6. Jos mahdollista, perustus tulisi suunnitella siten, että tarvittaessa systeemin ominaistajuuden muuttaminen myöhemmin olisi mahdollista perustusaluetta tai perustuksen massaa muuttamalla.

7. Mahdollisuuksien mukaan koneen ja perustuksen painopiste pyritään sijoittamaan perustuslaatan yläpinnan alapuolelle.

8. Koneiden ja laitteiden osat tulisi olla hyvin tasapainotettuja, jotta dynaamiset voimat saadaan minimoitua. Tämä on tavallisesti koneinsinöörin vastuulla.

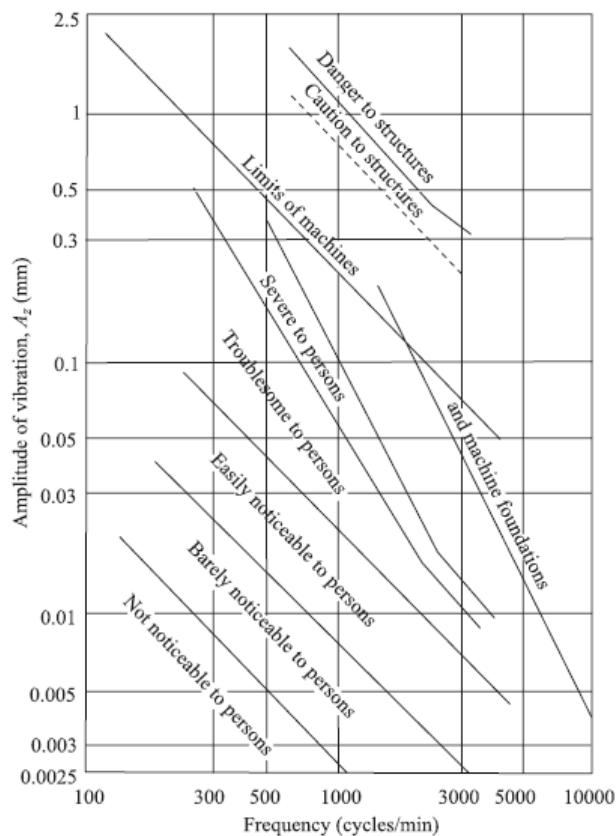
9. Pohjavedenpinnan tulisi olla vähintään perustuksen leveyden neljäsosan etäisyydellä perustuksen pohjasta.

10. Laitteperustukset tulee tarvittaessa suojata koneöljyltä sopivalla pinnoitteella tai käsittelyllä.

11. Laitteperustukset tulisi erottaa ympäröivistä rakenteista esimerkiksi liikuntasaumojen avulla.

12. Perustukseen upotettujen höyry- ja kuumailmaputkien riittävästä eristämisestä on huolehdittava.

Perustusten sallituista enimmäissiirtymistä on kirjallisuudessa esitetty erilaisia ohjeita. Richart (Richart 1962) on koonnut kuvan 3 mukaisen esityksen pystyväärhtelyn hyväksyttävistä amplitudeista eri taajuuksilla eri tilanteissa.



**Kuva 3.** Sallitut pystyväärhtelyn amplitudit eri taajuuksilla.

Esitys sallituista amplitudeista on kuitenkin vain ohjeellinen ja projektikohtaisesti asetettavat rajat voivat olla tiukemmat. Huomionarvoista on myös amplitudien pienuus verrattuna käyttörajaan staattisten kuormien osalta.

Laiteperustusten analyysin kannalta perustusten erottaminen ympäröivistä rakenteista on hyvin oleellista. Ilman tätä määritettyjä ominaistuuksia ja amplitudeja ei voida pitää luotettavina, sillä liittyvät rakenteet voivat vaikuttaa oleellisesti perustussysteemin massaan ja jäykkyyteen. Perustuksen ja sitä ympäröivien rakenteiden välissä tulisi olla 25–100 mm rako. Matalaviritteisten perustussysteemien tapauksessa koneiden putkituksissa on käytettävä joustavia liitoskappaleita, sillä muuten putkien jäykkyys vaikuttaa värähtelyn ominaistuuksiin ja amplitudeihin. (Bhatia 2008, s. 7-9.)

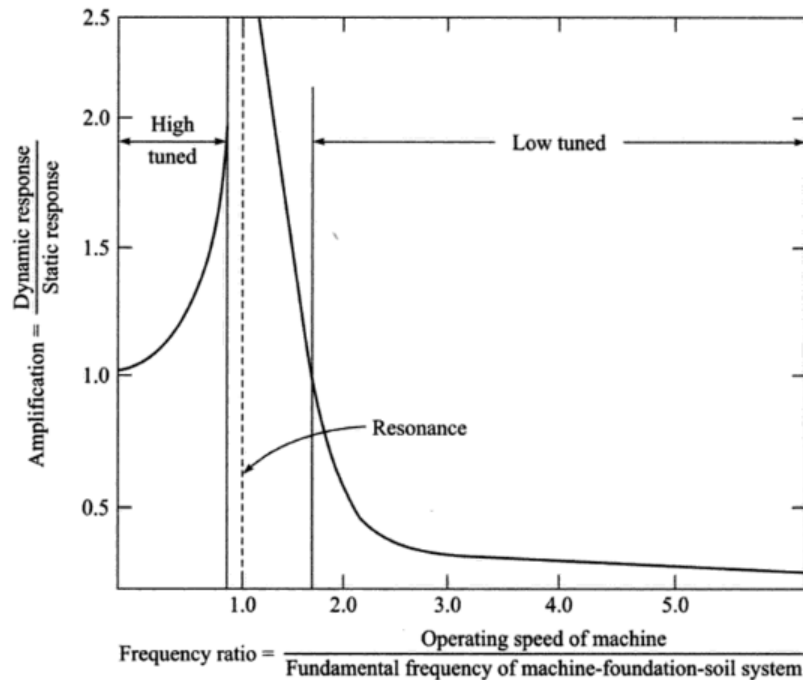
Aiemmin työssä viitatus koneiden kuormia käsittelevän eurokoodin SFS-EN 1991-3 lisäksi Suomessa seuraavat standardit käsittelevät laiteperustuksia: SFS 4631, SFS 4632, SFS 4633, SFS 4634, SFS 5786 ja SFS 5787. Standardit eivät kuitenkaan sisällä kokonaisvaltaisia suunnitteluohjeita perustuksille vaan tarjoavat lomakepohjan suunnittelijalle välitettävistä laitetiedoista ja esittävät laitteiden ja perustusten välisen kiinnityksen perustusruvien ja kiinnityslevyjen avulla toteutettavaksi. Lisäksi standardeissa PSK 3011 ja PSK 3012 käsitellään laiteperustusten nimikkeistöä, yleisohjeita, rakentamistoleransseja ja jälkivalua. (Suomen Standardisoimisliitto SFS, ; PSK Standardisointi, )

## 2.3 Viritys

Kuten suunnittelukriteerien kohdassa 1 kerrotaan, resonanssin välttäminen on hyvin olennainen asia laiteperustusten suunnittelussa. Tätä laiteperustus-maa-systeemin, laitteen käyntitaajuudesta poikkeavaa omaistuuksien valintaa kutsutaan laiteperustusten viritykseksi. Laiteperustus-maa-systeemin ominaistajuuden valintaa selvästi koneen käyntitaajuutta suuremmaksi kutsutaan korkeaviritykseksi. Puolestaan ominaistajuuden valintaa selvästi koneen käyntitaajuutta matalammaksi kutsutaan matalaviritykseksi. (Datta & Gulhati 2005, s. 692–693.) Virituksen periaate on nähtävissä kuvasta 4.

Korkeaviritys sopii erityisesti alhaisella käyntitaajuudella toimivien laitteiden tapauksessa. Korkeavirityksen etu on, että laitteen ei tarvitse käydä läpi resonanssia laitteen sammuttamisen tai sulkemisen yhteydessä. Lisäksi se sopii tilanteeseen, jossa laitetta joudutaan käyttämään tavallista pienemmällä suorituskäytöllä. Korkeaviritteillä systeemeillä on suositeltavaa tarkistaa resonanssin todennäköisyys korkeampien ylävärähtelyiden osalta. Tämä tarkoittaa perustussysteemin taajuuksien monikertojen täsmäyksen laitteen käyntitaajuuden kanssa, esimerkiksi perustussysteemin taajuuden ollessa kaksin- tai kolminkertainen laitteen käyntitaajuuteen nähden, mikä voi ilmetä perustuksen amplitudihuippuina. Ylätaajuuksilla resonanssin välttäminen ei ole aivan välttämätöntä, mutta kuitenkin suositeltavaa. (Bhatia 2008, s. 7–9.)

Korkeataajuuslaitteiden tapauksessa korkeaviritteinen systeemi on hankalaa saavuttaa ja voi osoittautua hyvin kalliiksi. Usein tällaisissa tapauksissa matalaviritys on sopivin ratkaisu, jolloin on syytä varmistaa, että värähtely pysyy sallitulla tasolla laitteen käynnistämisen ja sulkemisen yhteydessä. Matalaviritys voidaan toteuttaa käyttämällä perustus-systeemejä, joiden ominaistaajuuden muuttaminen onnistuu tarvittaessa massaa tai jäykkyyttä muuttamalla. Tämä onnistuu mm. kasvattamalla perustuksen kokoa (massan lisäys), varustamalla perustus massanlisäyksen mahdollistavilla koloilla tai käyttämällä vaimennusosia, kuten jousia tai pehmusteita (jäykkyyden muuttaminen).



**Kuva 4.** Laiteperustuksen viritys.

Aina resonanssin välttäminen ei ole mahdollista. Tällaisissa tapauksissa on varmistettava amplitudien pysyminen asetetuissa rajoissa esimerkiksi vaimentimien avulla.

## 2.4 Upotettu laiteperustus

Useimmat laiteperustukset upotetaan jollekin syvyydelle maahan. Tämän seurauksena maa ei vastusta värähtelyä vain perustuksen alapuolella vaan myös ympärystäytöjen syvyydellä perustuksen reunoilla. Vastaavasti säteilyvaimennuksesta aiheutuva energiahäviö ei tapahdu vain perustuksen alla vaan myös sen sivuilla. Vaikka upotetut laiteperustukset ovat hyvin yleisiä, niiden suunnittelusta on rajallisesti tietoa.

Upotuksen vaikutusta laiteperustuksen dynaamiseen vasteeseen on tutkittu laajasti. Tutkimusten mukaan upotus lisää jäykkyyttä ja pienentää resonanssin siirtymäamplitudia (Lysmer & Kuhlemeyer 1969; Chae 1970; Novák & Beredugo 1972; Lin & Jennings 1984). Jotkut tutkimukset ovat ristiriidassa, kasvattaako upotussyvyys resonanssitaajuutta

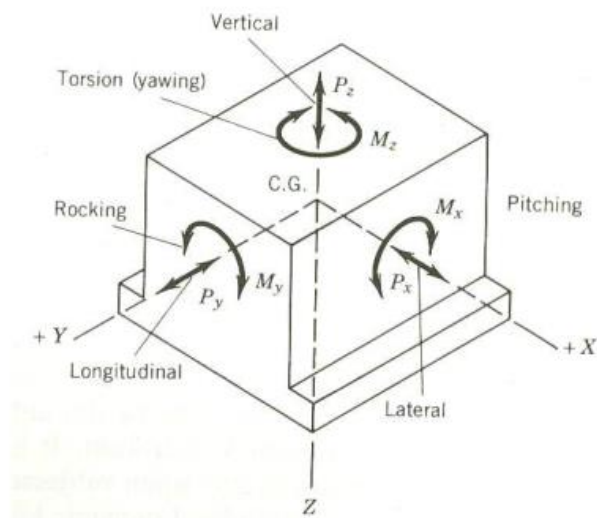


vai ei. Ristiriitaa on selitetty usein perustuksen pystyseiniä ja maan välisen kontaktin laadulla. Novakin mukaan (Novak 1970) aika vaikuttaa perustuksen pystypinnan sivukontaktin laatuun. (Mbawala 2015, s. 2–22.)

## 2.5 Laiteperustuksen vapausasteet

Massiiviset laiteperustukset määritellään jäykiksi verrattaessa niiden jäykkyyttä alla olevan maan jäykkyyteen. Mekaniikassa jäykän kappaleen katsotaan koostuvan äärellisestä määrästä partikkeleita ja jossa partikkelien välimatka toisiinsa nähden pysyy muuttumattomana kappaletta kuormitettaessa miten hyvänsä (Salmi 1998, s. 127). Toisin sanoen jäykkää kappaletta kuormitettaessa siihen ei synny sisäisiä muodonmuutoksia tai muodonmuutokset ovat niin pieniä, että niitä ei tarvitse huomioida. Täten massiivisten laiteperustusten kohdalla voidaan puhua jäykän kappaleen vapausasteista (kuva 5), joita on 6, ja ne ovat (Prakash & Puri 2006, s. 7–8):

1. translaatio Z-akselia pitkin
2. translaatio X-akselia pitkin
3. translaatio Y-akselia pitkin
4. rotaatio Z-akselin ympäri
5. rotaatio X-akselin ympäri
6. rotaatio Y-akselin ympäri.



**Kuva 5.** Massiivisen laiteperustuksen vapausasteet.

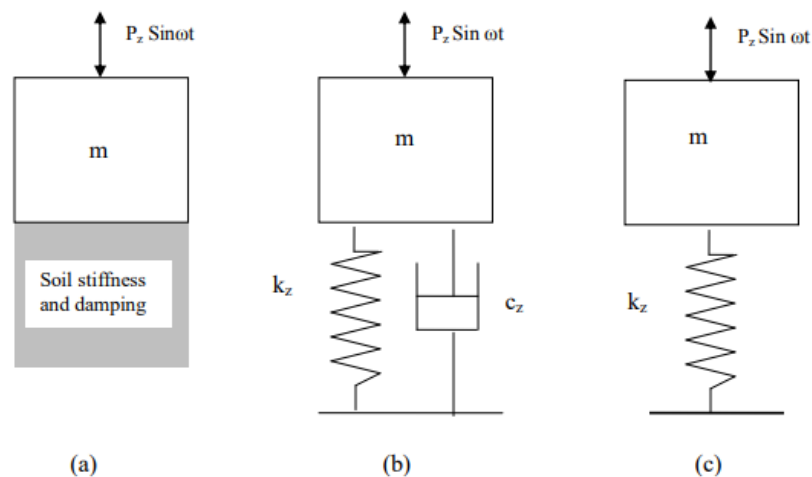
Laiteperustuksella näistä kuudesta liikemahdollisuudesta katsotaan vain translaation Z-akselia pitkin ja rotaation Z-akselin ympäri voivan tapahtua riippumattomasti muista liikkeistä. Translaatio X-akselia pitkin ja rotaatio Y-akselin ympäri ovat kytkettyjä toisiinsa kuten vastaavasti myös translaatio Y-akselia pitkin ja rotaatio X-akselin ympäri. (Prakash 1981, s. 344.) Tämä johtuu siitä, että laiteperustuksen massakeskipiste on yleensä aina maanpinnan aiheuttaman, vaakavoimia vastustavan tukivoiman, yläpuolella (Varghese

2005, s. 424). Täten massiivisilla laiteperustuksilla tarkastellaan tyypillisesti neljän tyypistä liikettä, joista kaksi ovat muista liikesuunnista riippumattomia eli kytkemättömiä vapausasteita ja kaksi toisista liikesuunnista riippuvia eli kytkettyjä vapausasteita.

## 2.6 Ideaalimalli

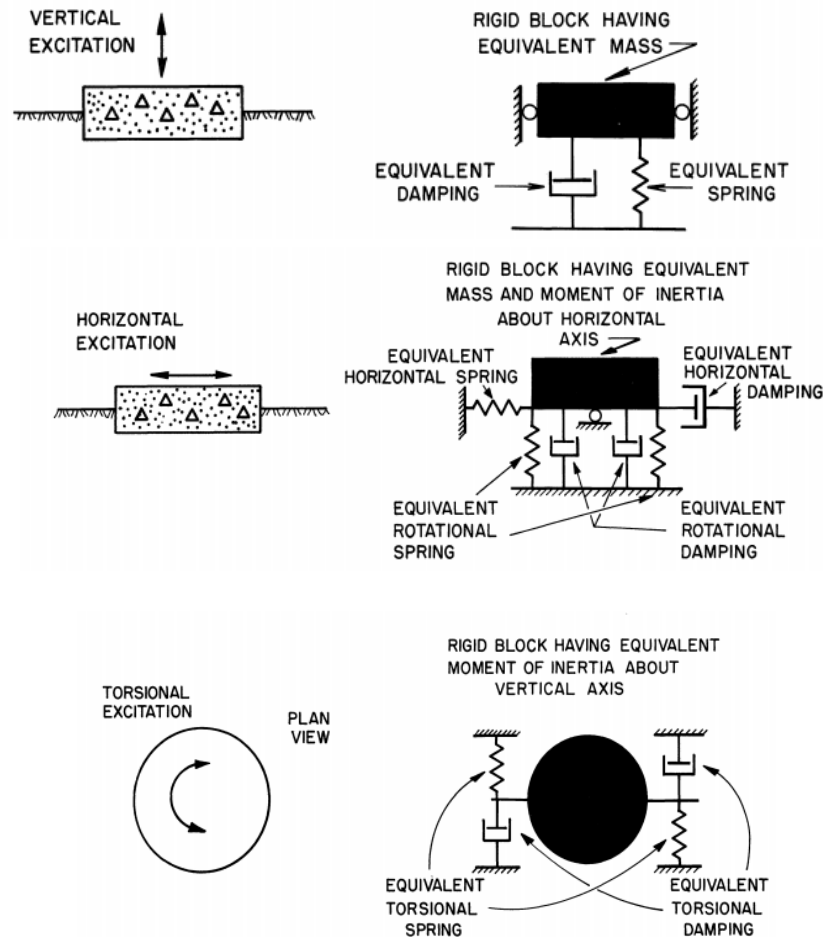
Laiteperustusten analysointi suoritetaan tavallisesti idealisoimalla systeemi. Teoreettisen analyysin ja kokemuseräisen tiedon mukaan useimmissa käytännön tapauksissa laiteperustus-maa-systeemi voidaan yksinkertaistaa yhden tai kahden vapausasteen malliksi. Mitä useampi värähtelyn vapausaste on riippuvainen muiden vapausasteiden värähtelystä, sitä monimutkaisemmaksi tarkastelu käy. Tarkastellaan systeemiä, jossa massiivinen laiteperustus lepää maan päällä ja systeemin massakeskipisteeseen kohdistuu pystysuuntainen harmoninen heräte laitteen toiminnasta (kuva 6a). Tällöin laiteperustus värähtelee vain pystysuunnassa sen staattisen tasapainoaseman ympärillä. (Prakash & Puri 2006, s. 9.)

Laiteperustuksen analyysissä systeemin yksinkertaisin analysointimalli voidaan esittää kuvassa 6b kuvattuna jousi-massa-vaimennin-systeeminä. Tässä mallissa jousi kuvaa maan elastista käyttäytymistä laiteperustuksen alapuolella. Vaimennin kuvaa energiahäviötä tai vaimennusilmiötä. Maan vaimennusominaisuuksia on käsitelty tarkemmin kappaleessa 4. Jos vaimennusta ei huomioida, malli yksinkertaistuu jousi-massa-systeemiksi (kuva 6c). Vaikka kuvassa 6 on esitetty yhden vapausasteen systeemejä, näitä malleja voidaan käyttää kuvaamaan laiteperustuksen värähtelyongelmaa missä hyvänsä värähtelymuodossa, kunhan jousi- ja vaimennuskertoimet on määritetty oikein. Aiemmin määritettyjen kytkettyjen vapausasteiden kohdalla, käytetään kahden vapausasteen mallia.



**Kuva 6.** Laiteperustuksen pystyväärähtelyt: a) todellinen tapaus b) ideaalimalli vaimennuksella c) ideaalimalli ilman vaimennusta (Prakash & Puri 2006, s. 10).

Kuvassa 7 on esitetty upotetun laiteperustuksen ideaalimallit erisuuntaisilla herätevoimilla. Kuten laiteperustusten vapausasteiden yhteydessä todettiin, laiteperustuksilla vain pystysuuntainen liike ja rotaatio pysty akselin ympäri voivat tapahtua muista liikesuunnista riippumattomasti. Pystysuuntaisen herätteen tapauksessa ideaalimalli upotetulle laiteperustukselle on kuten kuvan 6b yksinkertainen malli, mutta laiteperustuksen vaakasuuntainen liike on nyt estetty.



**Kuva 7.** Upotetun laiteperustuksen ideaalimallit eri herätteille (Whitman & Richart 1967, s. 9).

Vaakasuuntaisen herätteen tapauksessa mallissa on oltava herätteen suuntainen jousikykentä sekä vaimennus. Lisäksi on huomioitava toisiinsa kytketyt liikesuunnat, kuten aiemmin todettiin. Siksi tällaisen tapauksen ideaalimallissa on myös kiertojousi ja kierto-vaimennus. Vääntöherätteen katsotaan olevan merkitsevä vain pyöreiden laiteperustusten tapauksessa eikä sitä tarkastella tarkemmin tässä työssä.

## 2.7 Värähtelyn hallinta

Värähtelyn eliminointi dynaamisen analyysin perusteella ei ole ainoa vaihtoehto. Toisi-naan esimerkiksi kustannukset saattavat rajoittaa dynaamiseen tarkasteluun pohjautuvan

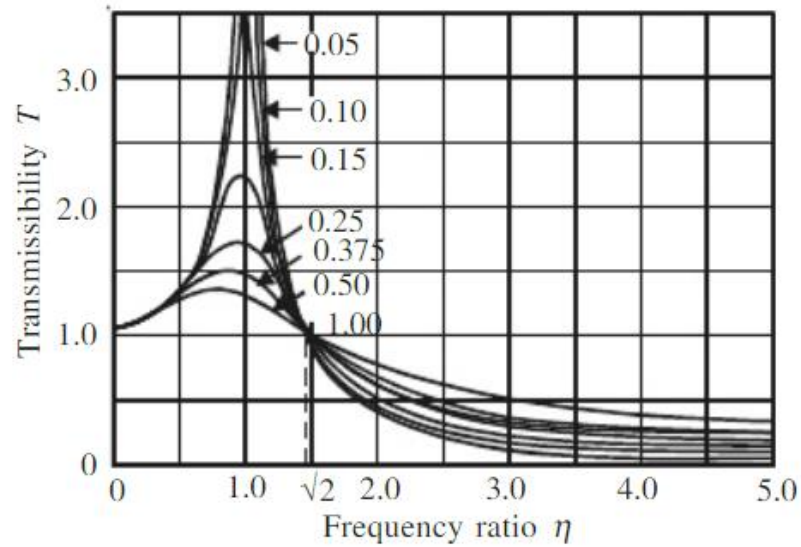
ratkaisun käyttöä. Useissa käytännön tilanteissa on mahdollista rajoittaa dynaamisia voimia, jotka aiheuttavat värähtelyn. Suunnittelukriteereissä jo mainitun resonanssin välttämisen lisäksi, erilaisten vaimentimien ja vaimennusmekanismien käytöllä voidaan hallita haitallista värähtelyä. Laitteperustusten tapauksissa esimerkiksi kiinnittämällä toinen jousi-massa-systeemi eli dynaaminen värähtelyvaimennin värähtelevään koneeseen voidaan systeemin merkitsevimmät ominaistajuudet pitää kaukana herätetaajuudesta eli toisin sanoen pienentää resonanssin vastetta. (Singiresu 1995, s. 565–604.)

Laitteperustuksen virityksestä huolimatta värähtelylähteen synnyttämien värähtelyjen ehkäisemistä ei saa jättää koskaan huomiotta. Värähtelevän koneen tasapainottamiseen ei rakennesuunnittelijalla useimmiten ole kuitenkaan mahdollista vaikuttaa. Sen sijaan herätevoimien siirtymistä koneesta perustukseen voidaan ehkäistä eristämällä. Värähtelyn eristämällä tarkoitetaan joustavan eristeen asettamisesta värähtelevän massan ja värähtelylähteen väliin siten, että systeemin vasteen pieneneminen saavutetaan. Eristyksen jako aktiiviseen ja passiiviseen määritellään näkökulmasta riippuen kahdella eri tavalla.

Energiankäytön näkökulmasta eristyssysteemi on aktiivinen tai passiivinen riippuen käytetäänkö eriste ulkoista energiaa tehtävänsä suorittamiseen. Tämän määritelmän mukaan passiivinen eriste koostuu energian kuluttajasta sekä joustavasta kappaleesta. Metalliset jouset, pneumaattiset jouset, huopa, korkki ja kumijouset ovat esimerkkejä passiivisista eristeistä. Aktiivinen eriste on sensorista, signaalinkäsittelijästä ja käyttölaitteesta koostuva tehostinmekanismi.

Toinen näkökulma liittyy siihen, halutaanko värähtelyltä suojata vain jokin tietty kohde. Aktiivinen eristys tarkoittaa tässä värähtelylähteen eristämistä ympäristöstään, jolloin värähtely heikkenee kaikkialla värähtelylähteen läheisyydessä. Passiivinen eristys puolestaan tarkoittaa värähtelylähteen läheisyydessä jonkin tietyn pisteen suojaamista, minkä värähtelyä tulee vähentää. (Das & Ramana 2010, s. 261.)

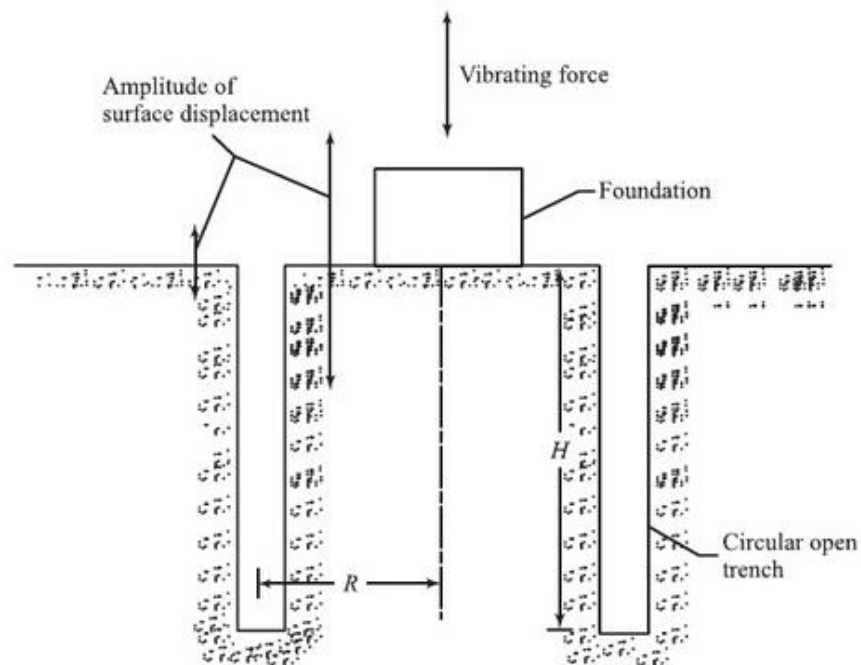
Eristämisen tehokkuus määritellään siirtyvyyden  $T$  avulla, joka on eristeen läpi siirtyneen voiman ja herätevoiman suhde. Kuvassa 8 siirtyvyys on esitetty koneen ja perustuksen taajuussuhteen funktiona. Siitä nähdään, että taajuussuhteen on oltava vähintään  $\sqrt{2}$  kaikissa tapauksissa, jotta siirtyvyys on alle 1. Tämä tarkoittaa, että eristämisen kannalta perustuksen ominaistajuuden tulisi olla selkeästi pienempi kuin kertoimella  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  kerrottu koneen ominaistajuus. (Varghese 2005, s. 438–439.) Kuvan amplitudihuippuun merkityt arvot kertovat suhteellisen vaimennuskertoimen suuruuden.



**Kuva 8.** Siirtyvyys taajuussuhteen funktiona.

Jo asennetuille koneille eristämisen vaihtoehtoja ovat joko perustuksen pohjan alan kasvattaminen tai perusmaan jäykkyyden lisääminen stabiloimalla. Myös ojien kaivaminen värähtelyaaltojen reitille vähentää aaltojen siirtyvyyttä.

Woods (Woods 1968) tutki avo-ojien vaikutusta eristävyYTEEN kenttätutkimusten avulla, jossa ympyränmuotoiseen anturaan kohdistettiin pystysuuntainen dynaaminen heräte. Aktiivisen eristämisen periaate on havainnollistettu kuvassa 9.



**Kuva 9.** Periaatekuva laiteperustuksen värähtelyn eristämisestä avo-ojia käyttäen (Das & Ramana 2010, s. 262).

Tutkimuksessa ojien suojausvaikutusta kuvataan amplitudin vähennyskertoimen (ARF) avulla, joka määritellään seuraavasti:

$$\text{ARF} = \frac{\text{Pystyvärähtelyn amplitudi ojien kanssa}}{\text{Pystyvärähtelyn amplitudi ilman oja}}.$$

Tutkimukset Woods suoritti seuraavilla parametriväleillä:  $R/\lambda_r = 0,22 \dots 0,910$ ,  $H/\lambda_r = 0,222 \dots 1,82$ . Kuvan 9 mukaisesti  $R$  on ojan etäisyys värähtelylähteestä,  $H$  on ojan syvyys ja  $\lambda_r$  Rayleigh-aallon aallonpituus. Woods päätyi tutkimuksessaan tulokseen, että tyydyttävä eristys toteutuu, kun  $\text{ARF} \leq 0,25$ . Ojien kiertäessä koko perustuksen ympäri, tähän päästään, kun  $H/\lambda_r = 0,6$  ja sitä suuremmilla arvoilla.

### 3. KATSAUS DYNAMIIKKAAN

Termillä dynaaminen tarkoitetaan yksinkertaisesti ajan myötä muuttuvaa. Näin ollen dynaaminen kuorma on mikä tahansa kuorma, jonka suuruus, suunta ja/tai paikka muuttuvat ajan myötä. Värähtelyn seurauksena syntyvää systeemin liiketilaa kutsutaan vasteeksi. Vaste voi olla joko siirtymävaste, nopeusvaste tai kiihtyvyysvaste. Myös dynaamisen kuorman vaste on ajasta riippuvainen, jolloin dynaamisella ongelmalla ei ole yhtä yksittäistä ratkaisua kuten staattisilla ongelmilla. Mikäli kuormitus tunnetaan täysin ajan funktiona, sitä sanotaan deterministiseksi kuormaksi ja kuormituksen vasteanalyysi on deterministinen. Dynaamisen kuorman vaste esitetään tavallisesti rakenteen siirtymän suhteen. Jos taas kuormituksen aikariippuvuutta ei täysin tunneta, mutta se voidaan määritellä tilastotieteellisessä mielessä, puhutaan satunnaiskuormituksesta, jonka vasteanalyysi on epädeterministinen. (Clough & Penzien 2003, s. 1–4.)

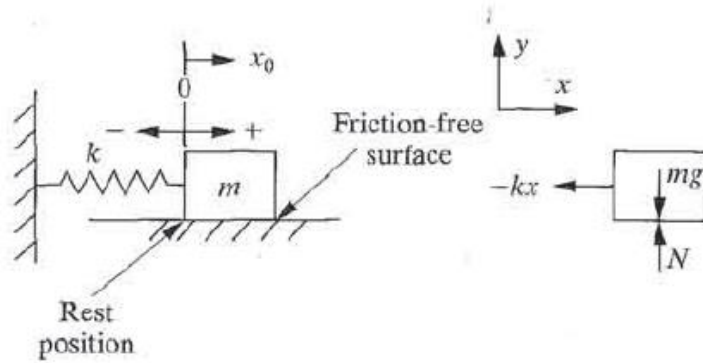
Deterministiset kuormat voidaan edelleen jakaa jaksolliseen ja jaksottomaan kategoriaan. Yksinkertaisin jaksollinen kuorma on sinifunktion muotoinen. Tyypillisesti pyörivät epäkeskot koneet aiheuttavat tällaista jaksollista kuormitusta. Jaksottomiin kuormiin laskeaan lyhytkestoiset impulssikuormat (mm. räjähdyksistä) sekä pitkäkestoiset, yleiset kuormat (mm. maanjäristyksistä). Tässä tutkimuksessa keskitytään dynaamisiin jaksollisiin kuormiin, joiden aikariippuvuus tunnetaan.

#### 3.1 Yhden vapausasteen systeemi

Yksinkertaisin tapa kuvata värähtelyä on tarkastella joustaa, jonka toinen pää on kiinnitetty kiinteään kohteeseen ja jonka toisessa päässä on jokin massa. Tällaista systeemiä kutsutaan yhden vapausasteen värähtelijäksi, missä värähtely tapahtuu nimensä mukaisesti vain yhdessä liikesuunnassa.

##### 3.1.1 Vapaa värähtely

Vapaaksi värähtelyksi eli ominaisvärähtelyksi kutsutaan toistuvaa liikettä, joka syntyy, kun systeemi poikkeutetaan stabiilista tasapainoasemastaan ja päästetään vapaaseen liikkeeseen, jolloin palautusvoimat pyrkivät saamaan systeemin takaisin tasapainoasemaan (Salmi & Virtanen 2006, s. 373). Tutkitaan jousi-massa-systeemiä, jossa itse jousi oletetaan massattomaksi ja pinta kitkattomaksi. Tällaista systeemiä kutsutaan yksinkertaiseksi harmoniseksi värähtelijäksi tai vaimentamattomaksi yhden vapausasteen systeemiksi. (Inman 2007, s. 5–10.)



**Kuva 10.** Kitkattoman jousi-massa-systeemin vapaakappalekuva (Inman 2007, s. 7).

Kuvan 10 perusteella systeemin liikeyhtälö x-akselin suunnassa on

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t), \quad (3.1)$$

missä  $m$  on kappaleen massa,  $k$  on jousen jousivakio,  $\ddot{x}(t)$  on kappaleen kiihtyvyys ajan funktiona ja  $x(t)$  on kappaleen siirtymä ajan funktiona. Yhtälön (3.1) voimassaolo edellyttää, että jousen liike pysyy lineaarisella alueella. Yhtälö on differentiaaliyhtälö, joka täten voidaan ratkaista usealla eri tavalla. Tässä esitetyssä ratkaisutavassa ratkaisuyritteeksi valitaan

$$x(t) = A \sin(\omega_n t + \Phi), \quad (3.2)$$

missä vakio  $A$  on värähtelyliikkeen amplitudi,  $\omega_n$  on ominaiskulmataajuus,  $t$  on aika ja  $\Phi$  vaihekulma. Yrite (3.2) on kyseisen kaltainen, koska oletettavasti liike on jaksollista ja sinifunktio kuvaa värähtelyä. Yritteen ensimmäinen derivaatta eli kappaleen nopeus on

$$\dot{x}(t) = \omega_n A \cos(\omega_n t + \Phi). \quad (3.3)$$

Derivoimalla kappaleen nopeus (3.3) saadaan yritteen toinen derivaatta eli kappaleen kiihtyvyys

$$\ddot{x}(t) = -\omega_n^2 A \sin(\omega_n t + \Phi). \quad (3.4)$$

Sijoitetaan yhtälöt (3.2) ja (3.4) systeemin liikeyhtälöön (3.1), jolloin saadaan

$$-m\omega_n^2 A \sin(\omega_n t + \Phi) = -kA \sin(\omega_n t + \Phi). \quad (3.5)$$

Kun yhtälö (3.5) jaetaan puolittain massalla  $m$  ja amplitudilla  $A$ , nähdään, että yhtälö toteutuu, kun  $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ . Täten alkuperäinen ratkaisuyrite (3.2) on liikeyhtälön ratkaisu. Määritetään vielä vakiot  $A$  ja  $\Phi$ , jotka kuvaavat jousi-massa-systeemin alkuehtoja. Systeemin alkuasema  $x_0$  on

$$x_0 = x(0) = A \sin(\omega_n 0 + \Phi) = A \sin(\Phi) \quad (3.6)$$



ja alkunopeus  $v_0$

$$v_0 = \dot{x}(0) = \omega_n A \cos(\omega_n 0 + \Phi) = \omega_n A \cos(\Phi). \quad (3.7)$$

Ratkaistaan yhtälöistä (3.6) ja (3.7) vakiot  $A$  ja  $\Phi$ , jotka saadaan muotoon

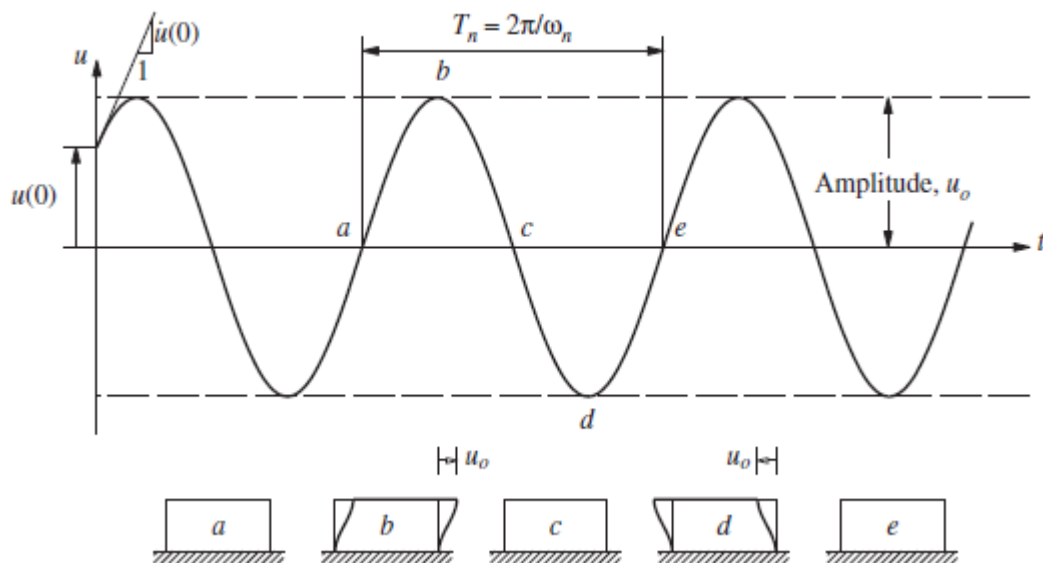
$$A = \frac{\sqrt{\omega_n^2 x_0^2 + v_0^2}}{\omega_n} \quad (3.8)$$

$$\Phi = \tan^{-1} \frac{\omega_n x_0}{v_0}. \quad (3.9)$$

Sijoittamalla vakiot (3.8) ja (3.9) liikeyhtälön ratkaisuun (3.2), jousi-massa-systeemin ratkaisu saadaan lopulliseen muotoon

$$x(t) = \frac{\sqrt{\omega_n^2 x_0^2 + v_0^2}}{\omega_n} \sin\left(\omega_n t + \tan^{-1} \frac{\omega_n x_0}{v_0}\right). \quad (3.10)$$

Ratkaisua (3.10) kutsutaan systeemin vapaan värähtelyn vasteeksi, koska systeemiin ei vaikuta ulkoisia voimia ajanhetken  $t = 0$  jälkeen. Jousi-massa-systeemin liikettä kutsutaan yksinkertaiseksi harmoniseksi liikkeeksi tai värähtelyliikkeeksi.



**Kuva 11.** Vaimentamattoman vapaan värähtelyn vaste (Chopra 2011, s. 40).

Vapaan värähtelyn vaste (3.10) on piirretty kuvaan 11 ja siitä nähdään, miten systeemi värähtelee tasapainoaseman ympärillä. Siirtymä-aika-kuvaajan osa a-b-c-d-e kuvaa vapaan värähtelyn yhtä sykliä (Chopra 2011, s. 40–41). Mikäli nopeus- ja kiihtyvyyshankinto piirrettäisiin samaan kuvaan, nähtäisiin, että nopeus on  $90^\circ$  ja kiihtyvyys  $180^\circ$  siirtymäkuvaajaa edellä.

Aikaa, joka kuluu värähtelijän yhteen sykliin, kutsutaan ominaisvärähdysajaksi  $T_n$ , joka määritellään

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}. \quad (3.11)$$

Ominaisvärähdysajan käänteisarvoa kutsutaan systeemin ominaistaaajuudeksi

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi}. \quad (3.12)$$

Systeemin ominaisvärähdysaika (3.11), ominaistaaajuus (3.12) sekä ominaiskulmataajuus riippuvat vain systeemin massasta ja jäykkyydestä, eivät alkuehdoista kuten amplitudi. Nämä suureet kuvaavatkin systeemin ominaisuuksia. Suurempi jäykkyys tarkoittaa suurempaa systeemin ominaistaaajuutta ja lyhyempää ominaisvärähdysaikaa, kun taas suurempi massa pienentää ominaistaaajuutta ja pidentää ominaisvärähdysaikaa.

### 3.1.2 Vaimennettu vapaa värähtely

Kappaleessa 3.1.1 esitetyn jousi-massa-systeemin vasteen mukaan systeemi värähtelee ikuisesti. Todellisuudessa ei näin ole vaan värähtely vaimenee vähitellen. Yhden vapausasteen systeemin massa ja jousivakio ovat helposti määritettävissä, mutta vaimennus on usein monimutkainen ilmiö. Vaikka todellisissa rakenteissa vaimennus johtuu useasta samaan aikaan energiaa kuluttavasta mekanismista, matemaattisesti kätevä lähestymistapa on mallintaa ne ekvivalenttina viskoosina vaimennuksena eli nestevaimennuksena, jolloin systeemin rakennemalliin lisätään vaimenninelementti (Chopra 2011, s. 39). Viskooisin vaimennuksen lisäksi muita vaimennusmalleja ovat Coulombin vaimennus eli kitka-vaimennus sekä rakenteellinen vaimennus. Kun systeemin liikeyhtälössä (3.1) huomioidaan viskoosi vaimennus, yhtälö saa muodon

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad (3.13)$$

missä  $c$  on vaimennuskerroin. Yhtälö (3.13) on vaimennetun yhden vapausasteen systeemin liikeyhtälö. (Inman 2007, s. 19–26.) Käytetään yhtälön ratkaisemiseen ratkaisuyritettä  $x(t) = ae^{\lambda t}$ , missä  $a$  ja  $\lambda$  ovat nollasta poikkeavia vakioita. Kun ratkaisuyrite sijoitetaan liikeyhtälöön, saadaan yhtälö muotoon

$$(m\lambda^2 + c\lambda + k)ae^{\lambda t} = 0. \quad (3.14)$$

Koska tiedetään, että  $ae^{\lambda t} \neq 0$ , yhtälö (3.14) yksinkertaistuu muotoon

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0. \quad (3.15)$$

Näin saatu yhtälö (3.15) on nimeltään karakteristinen yhtälö. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava johtaa kahteen ratkaisuun

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \mp \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4km}. \quad (3.16)$$

Tavallisesti nämä ratkaisut esitetään dimensiottoman suhteellisen vaimennuskertoimen  $\xi$  avulla, joka määrittää vaimennuksen asteen.

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{km}}, \quad (3.17)$$

missä  $c_{cr} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km}$  on kriittinen vaimennuskerroin. Nyt karakteristisen yhtälön ratkaisu (3.16) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \mp \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}. \quad (3.18)$$

Suhteellinen vaimennuskerroin (3.17) määrittää ovatko yhtälön (3.18) juuret reaaliset vai kompleksiset liittoluvut. Kun suhteellinen vaimennuskerroin on vähemmän kuin 1 ( $0 < \xi < 1$ ), yhtälön diskriminantti  $\xi^2 - 1$  on negatiivinen, jolloin juuret ovat kompleksisia liittolukuja. Tällaista systeemiä kutsutaan alivaimennetuksi tai alikriittisesti vaimennetuksi ja se on tyypillinen monissa mekaanisissa systeemeissä. Alikriittisesti vaimennetun systeemin juuret ovat

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \mp \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}j, \quad (3.19)$$

missä  $j = \sqrt{-1}$ . Sijoittamalla ratkaisut (3.19) kappaleen alussa esitettyyn ratkaisuyritteeseen  $x(t) = ae^{\lambda t}$ , saadaan kaksi ratkaisua. Koska systeemin liikeyhtälö (3.13) on lineaarinen, kahden ratkaisun summa on myös ratkaisu, jolloin

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left( a_1 e^{j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t} + a_2 e^{-j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t} \right), \quad (3.20)$$

missä  $a_1$  ja  $a_2$  ovat mielivaltaisia kompleksisia integrointivakioita. Käyttämällä Eulerin kaavaa, yhtälö (3.20) on mahdollista kirjoittaa yksinkertaisempaan muotoon

$$x(t) = Ae^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \Phi), \quad (3.21)$$

jossa  $A$  ja  $\Phi$  ovat integrointivakioita ja  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$  on vaimennettu ominaiskulmataajuus. Vakiot määritetään systeemin alkuehtojen avulla samalla tavalla kuin vaimentamattoman systeemin.

$$x_0 = x(0) = Ae^{-\xi\omega_n 0} \sin(\omega_d 0 + \Phi) = A \sin(\Phi). \quad (3.22)$$

Yhtälöstä (3.22) nähdään, että  $A = x_0 / \sin(\Phi)$ . Sijoittamalla se yhtälön (3.21) derivaattayhtälöön saadaan

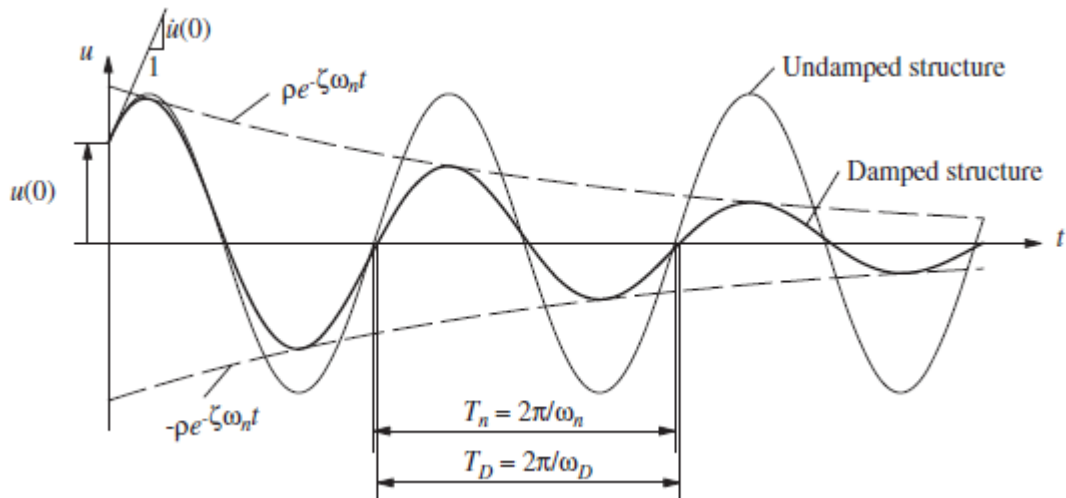
$$\begin{aligned} v_0 = \dot{x}(0) &= -\xi\omega_n Ae^{-\xi\omega_n 0} \sin(\omega_d 0 + \Phi) + \omega_d Ae^{-\xi\omega_n 0} \cos(\omega_d 0 + \Phi) = \\ &= -\xi\omega_n x_0 + \omega_d x_0 \cot(\Phi). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ratkaistaan yhtälöstä (3.23)  $\tan(\Phi) = \frac{\omega_d x_0}{v_0 + \xi \omega_n x_0}$ , jolloin  $\sin(\Phi) = \frac{\omega_d x_0}{\sqrt{(v_0 + \xi \omega_n x_0)^2 + (\omega_d x_0)^2}}$

ja integrointivakiot näin ollen ovat

$$A = \sqrt{\frac{(v_0 + \xi \omega_n x_0)^2 + (\omega_d x_0)^2}{\omega_d^2}} \quad \text{ja} \quad \Phi = \tan^{-1} \frac{\omega_d x_0}{v_0 + \xi \omega_n x_0}. \quad (3.24)$$

Sijoittamalla vakiot (3.24) liikeyhtälön ratkaisuun (3.21) saadaan vaimennetun systeemin vasteen funktio. Funktion kuvaaja (kuva 12) muodostuu verhoikäyrien väliin, jotka ovat muotoa  $x(t) = \mp A e^{-\xi \omega_n t}$  (Salmi & Virtanen 2006, s. 382). Vaimennus suurentaa systeemin ominaisvärähdysaikaa ja pienentää ominaiskulmataajuutta.



**Kuva 12.** Vaimenematon ja alivaimennettu vapaa värähtely (Chopra 2011, s. 50).

Kun suhteellinen vaimennuskerroin on suurempi kuin 1 ( $\xi > 1$ ), yhtälön diskriminantti  $\xi^2 - 1$  on positiivinen, jolloin juuret ovat reaalisia. Tällaista systeemiä kutsutaan ylivoimennetuksi tai ylikriittisesti vaimennetuksi. Ylikriittisesti vaimennetut rakenteelliset systeemit ovat epätavallisia normaaliolosuhteissa, mutta kuitenkin mahdollisia (Clough & Penzien 2003, s. 32). Ylikriittisesti vaimennetun systeemin juuret ovat

$$\lambda_{1,2} = -\xi \omega_n \mp \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}. \quad (3.25)$$

Koska molemmat juuret (3.25) ovat negatiivisia, liike lähenee asymptootisesti tasapainoasemaansa (Salmi & Virtanen 2006, s. 380). Tällöin liikeyhtälön ratkaisu tulee muotoon

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t} (a_1 e^{-\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t} + a_2 e^{\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t}). \quad (3.26)$$

Integrointivakiot  $a_1$  ja  $a_2$  ratkaistaan samalla tavalla kuin vaimentamattoman systeemin tapauksessa alkuehdoista. Tässä tapauksessa ne ovat

$$a_1 = \frac{-v_0 + (-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n x_0}{2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}} \text{ ja } a_2 = \frac{v_0 + (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n x_0}{2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}. \quad (3.27)$$

Sijoittamalla vakiot (3.27) liikeyhtälön ratkaisuun (3.26), tuloksena on ylikriittisesti vaimennetun systeemin ei-värähtelevän vasteen funktio. Liike ei siis toisin sanoen ole värähtelyä.

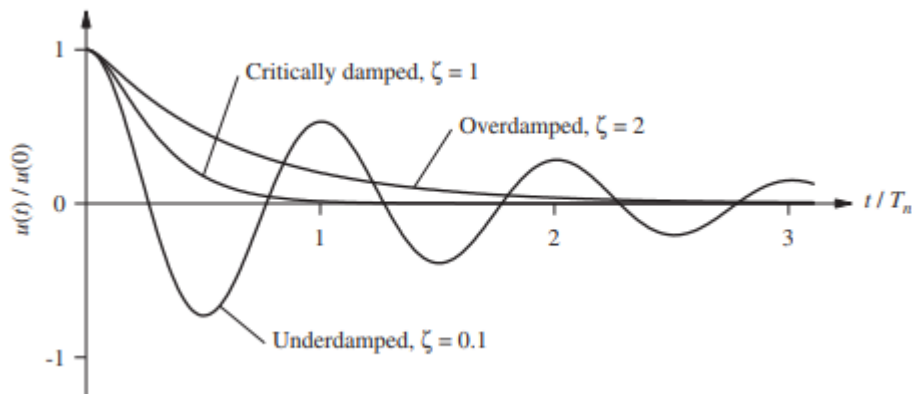
Erikoistapauksessa  $\xi = 1$  diskriminantti on 0. Tätä kutsutaan kriittiseksi vaimennukseksi ja se erottaa värähtelyliikkeen ei-värähtelevästä liikkeestä. Kriittisen vaimennuksen juuret ovat  $\lambda_{1,2} = -\omega_n$  ja liikeyhtälön ratkaisu

$$x(t) = (a_1 + a_2 t)e^{-\omega_n t}. \quad (3.28)$$

Jälleen yhtälön (3.28) vakioiden  $a_1$  ja  $a_2$  arvot saadaan määritettyä alkuehtojen mukaan. Vakioiden arvoiksi saadaan

$$a_1 = x_0 \text{ ja } a_2 = v_0 + x_0 \omega_n. \quad (3.29)$$

Kun vakiot (3.29) on sisällytetty liikeyhtälön ratkaisuun, voidaan funktion kuvaaja piirtää ja todeta, että kriittisesti vaimennettu systeemi lähenee ylikriittisesti vaimennettua systeemiä nopeammin tasapainoasemaansa, kun alkuehdot ovat samat (Salmi & Virtanen 2006, s. 381).



**Kuva 13.** Yli-, ali- ja kriittisesti vaimennetun systeemin vaste (Chopra 2011, s. 49).

Sekä yli-, ali- että kriittisesti vaimennetun systeemin vasteet on esitetty kuvassa 13. Tästä on helposti nähtävissä, että vain alikriittisesti vaimennetun systeemin vaste on värähtelyä. Kriittisesti vaimennetun systeemin kuvaajaa esittää systeemin pienintä vaimennuksen arvoa, joka johtaa värähtelemättömään liikkeeseen. Kriittistä värähtelyä hyödynnetään monissa sovelluksissa, joissa epätoivottu värähtely halutaan minimoida.

### 3.1.3 Vaimenematon pakkovärähtely

Pakkovärähtelyssä palautusvoimien lisäksi systeemiin kohdistuu jaksollisesti muuttuvia pakkovoimia eli herätteitä (Salmi & Virtanen 2006, s. 373). Tarkastellaan kappaleen 3.1.1 kaltaista vaimentamatonta systeemiä, mutta nyt harmoninen, ulkoinen voima vaikuttaa kappaleeseen. Harmonista voimaa  $F(t)$  voidaan mallintaa sinifunktion, kosinifunktion sekä kompleksisen eksponenttifunktion avulla. (Inman 2007, s. 103–107.) Annetaan sen tässä olla muotoa

$$F(t) = F_0 \cos \omega t, \quad (3.30)$$

missä  $F_0$  on herätteen amplitudi ja  $\omega$  herätteen kulmataajuus. Kun harmoninen voima (3.30) sijoitetaan vaimentamattoman systeemin liikeyhtälöön (3.1), yhtälö saa muodon

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos \omega t. \quad (3.31)$$

Jakamalla liikeyhtälö (3.31) massalla  $m$ , saadaan

$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = f_0 \cos \omega t, \quad (3.32)$$

missä  $f_0 = \frac{F_0}{m}$ . Differentiaaliyhtälö (3.32) voidaan ratkaista usealla tavalla. Usein ratkaisu löydetään valitsemalla ratkaisuyritteeksi herätevoiman kanssa samaa muotoa oleva funktio:

$$x_p(t) = X \cos \omega t, \quad (3.33)$$

missä  $x_p$  on yksittäisratkaisu ja  $X$  on pakkovärähtelyn vasteen amplitudi. Ratkaisuyrite (3.33) ja sen toinen derivaatta  $-\omega^2 X \cos \omega t$  sijoitetaan liikeyhtälöön (3.31). Tuloksena on

$$-\omega^2 X \cos \omega t + \omega_n^2 X \cos \omega t = f_0 \cos \omega t, \quad (3.34)$$

josta ottamalla yhteinen tekijä yhtälö (3.34) yksinkertaistuu muotoon

$$(-\omega^2 X + \omega_n^2 X - f_0) \cos \omega t = 0. \quad (3.35)$$

Tukeutumalla tietoon, että  $\cos \omega t$  ei voi olla 0 kaikilla ajan hetkillä, saadaan edellisestä yhtälöstä (3.35) ratkaistua amplitudi  $X$ .

$$X = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2}, \quad (3.36)$$

jossa  $\omega_n \neq \omega$ . Kun tämä ehto on voimassa, yksittäisratkaisu saadaan sijoittamalla amplitudin (3.36) arvo ratkaisuyritteen (3.33) lausekkeeseen:

$$x_p(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (3.37)$$

Systeemin ollessa lineaarinen kokonaisratkaisu on homogeenisen ratkaisun (3.2) ja yksittäisratkaisun (3.37) summa

$$x(t) = A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t + \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos \omega t, \quad (3.38)$$

missä  $A_1$  ja  $A_2$  ovat integrointivakioita, jotka määritellään alkuehtojen perusteella, kuten vapaan värähtelyn tapauksessa.

$$x_0 = x(0) = A_2 + \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (3.39)$$

$$v_0 = \dot{x}(0) = \omega_n A_1 \quad (3.40)$$

Ratkaisemalla integrointivakiot yhtälöistä (3.39) ja (3.40) ja sijoittamalla ne yhtälöön (3.38), saadaan vaimentamattoman systeemin pakkovärähtelyn vasteeksi

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \left( x_0 - \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \right) \cos \omega_n t + \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (3.41)$$

Yhtälö (3.41) ei ole voimassa, mikäli herätteen kulmataajuus on sama kuin systeemin ominaiskulmataajuus. Resonanssissa, joka on kenties värähtelyanalyysin tärkein käsite, herätteen kulmataajuus lähenee systeemin ominaiskulmataajuutta ja värähtelyn amplitudi kasvaa hyvin voimakkaasti. Vaimentamattomassa resonanssivärähtelyssä systeemin vaste kasvaa ajan mukana rajatta. Mikäli resonanssivärähtelyt pääsevät syntymään, systeemi voi vaurioitua värähtelyn jatkuessa, minkä johdosta resonanssin syntyminen on välttävää.

### 3.1.4 Vaimeneva pakkovärähtely

Kuten kappaleessa 3.1.2 todettiin, todellisissa systeemeissä on aina vaimennusta. Tarkastellaan yhden vapausasteen vaimennettua systeemiä, johon kohdistuu herätevoima. Liikkeyhtälö on

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos \omega t. \quad (3.42)$$

Kun liikkeyhtälö (3.42) jaetaan massalla, se saa vastaavan muodon kun vaimentamattoman pakkovärähtelyn tapauksessa:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = f_0 \cos \omega t. \quad (3.43)$$

Yksittäisratkaisun laskenta vaimennetulle systeemille etenee samoin kuin vaimentamattoman pakkovärähtelyn kohdalla ja sen oletetaan olevan muotoa

$$x_p(t) = X \cos(\omega t - \theta). \quad (3.44)$$

Vaihekulma on yhtälössä mukana vaimennuksen takia. Oletettu yksittäisratkaisu (3.44) voidaan kirjoittaa muodossa

$$x_p(t) = A_s \cos \omega t + B_s \sin \omega t, \quad (3.45)$$

missä vakiot ovat  $A_s = X \cos \theta$  ja  $B_s = X \sin \theta$ . Sijoittamalla oletetun yksittäisratkaisun (3.45) derivaatat liikeyhtälöön (3.43), tuloksena on

$$(-\omega^2 A_s + 2\xi\omega_n \omega B_s + \omega_n^2 A_s - f_0) \cos \omega t + (-\omega^2 B_s - 2\xi\omega_n \omega A_s + \omega_n^2 B_s) \sin \omega t = 0 \quad (3.46)$$

Yhtälön (3.46) on oltava voimassa jokaisella ajan hetkellä: Hetkellä  $t = \frac{\pi}{2\omega}$  kerroin  $\sin \omega t$  häviää ja hetkellä  $t = 0$  kerroin  $\cos \omega t$  häviää.

$$\begin{cases} (\omega_n^2 - \omega^2) A_s + (2\xi\omega_n \omega) B_s = f_0 \\ (-2\xi\omega_n \omega) A_s + (\omega_n^2 - \omega^2) B_s = 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

Yhtälöparista (3.47) saadaan tuntemattomille kertoimille ratkaisut

$$A_s = \frac{(\omega_n^2 - \omega^2) f_0}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n \omega)^2} \quad (3.48)$$

$$B_s = \frac{2\xi\omega_n \omega f_0}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n \omega)^2}. \quad (3.49)$$

Yksittäisratkaisun lopulliseen muotoon päästään sijoittamalla arvot (3.48) ja (3.49) yksittäisratkaisun yhtälöön (3.44), jossa  $X = \sqrt{A_s^2 + B_s^2}$  ja  $\theta = \tan^{-1} \frac{B_s}{A_s}$ .

$$X = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n \omega)^2}} \text{ ja } \theta = \tan^{-1} \frac{2\xi\omega_n \omega}{\omega_n^2 - \omega^2}. \quad (3.50)$$

Lopullinen vaimennetun pakkovärähtelyn kokonaisratkaisu on homogeenisen ratkaisun ja yksittäisratkaisun summa. Homogeenisen ratkaisun kertoimet  $A$  ja  $\Phi$  ratkaistaan alkuehtojen mukaan samalla menettelyllä kuin vaimentamattoman systeemin tapauksessa kappaleessa 3.1.2. Kertoimiksi saadaan

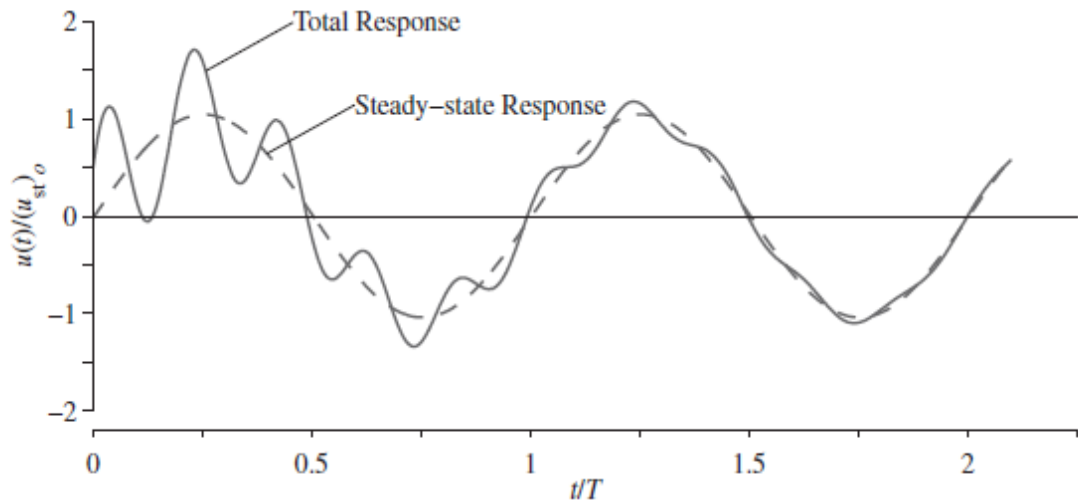
$$A = \frac{x_0 - X \cos \theta}{\sin \theta} \text{ ja } \Phi = \tan^{-1} \frac{\omega_d(x_0 - X \cos \theta)}{v_0 + (x_0 - X \cos \theta)\xi\omega_n - \omega X \sin \theta}. \quad (3.51)$$

Merkittävä huomio on, että kertoimet (3.51) eivät ole samat kuin vapaan värähtelyn tapauksessa. Alikriittisesti vaimennetun systeemin tapauksessa kokonaisratkaisu on nyt muotoa

$$x(t) = A e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \Phi) + X \cos(\omega t - \theta), \quad (3.52)$$



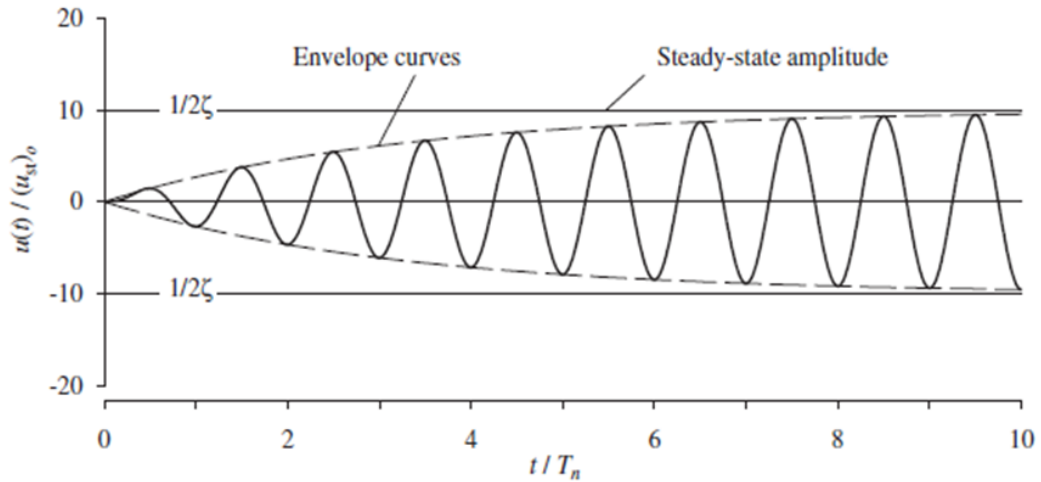
johon kertoimet (3.50) ja (3.51) sijoitetaan. Isoilla  $t$ :n arvoilla kokonaisratkaisun (3.52) homogeeninen osa lähestyy nollaa, jolloin kokonaisratkaisu lähestyy yksittäisratkaisun arvoa. Tästä syystä yksittäisratkaisua kutsutaankin pysyvän värähtelyn vasteeksi. (Inman 2007, s. 114–117.)



**Kuva 14.** Alikriittisesti vaimennetun systeemin pakkovärähtelyn vaste (Chopra 2011, s. 73).

Kuvassa 14 on havainnollistettu pakkovärähtelyn homogeenisen osan eli transientin vasteen eksponentiaalista pienenemistä ajan myötä. Transientti on värähtelyn ominaisvärähtelyn osuus ja pysyvä värähtely pakkovärähtelyn osuus. Tilanteesta riippuen homogeeninen osa voi kutistua merkityksettömän pieneksi hyvinkin nopeasti, suurilla vaimennuksen arvoilla sekunnin murto-osissa. Tällaisissa tapauksissa se voidaan jättää kokonaan huomiotta tarkastelusta ja keskittyä vain pysyvään värähtelyyn. Toisaalta pienillä suhteellisen vaimennuskertoimen arvoilla transientin vaikutus voi kestää niin kauan, että se on tilanteen kannalta merkittävä eikä sitä voida jättää huomiotta. Erityisesti transientti vaste voi olla hyvinkin merkittävä, mikäli sen amplitudi on suhteellisen suuri. Suurin amplitudi voidaan siis saavuttaa ennen kuin systeemi on päässyt pysyvän värähtelyn tilaan. (Chopra 2011, s. 73–76).

Kuvasta 15 käy ilmi, että vaimennetussa systeemissä resonanssitilanne ei aiheuta siirtymävasteen rajatonta kasvua kuten vaimentamattoman systeemin tapauksessa vaan vaimennus rajaa vasteen tiettyyn arvoon. Amplitudi kasvaa ajan myötä verhoikäyrien mukaisesti lähestyen pysyvien värähtelyjen vasteen amplitudia. Tärkeä huomio tästä on, että pysyvien värähtelyjen vasteen amplitudi on voimakkaasti riippuvainen suhteellisesta vaimennuskertoimesta. Mitä kevyempi vaimennus on, sitä enemmän syklejä tarvitaan saavuttamaan tietty prosenttiosuus pysyvien värähtelyjen amplitudista.



**Kuva 15.** Vaimennetun systeemin pakkovärähtelyn resonanssivaste suhteellisen vaimennuskertoimen arvolla  $\xi=0.05$  (Chopra 2011, s. 75).

Kertomalla  $\omega^2$  ulos ja jakamalla arvolla  $\frac{F_0}{m}$  yhtälön (3.50) pysyvän värähtelyn amplitudi ja vaihekulma voidaan muuttaa muotoon

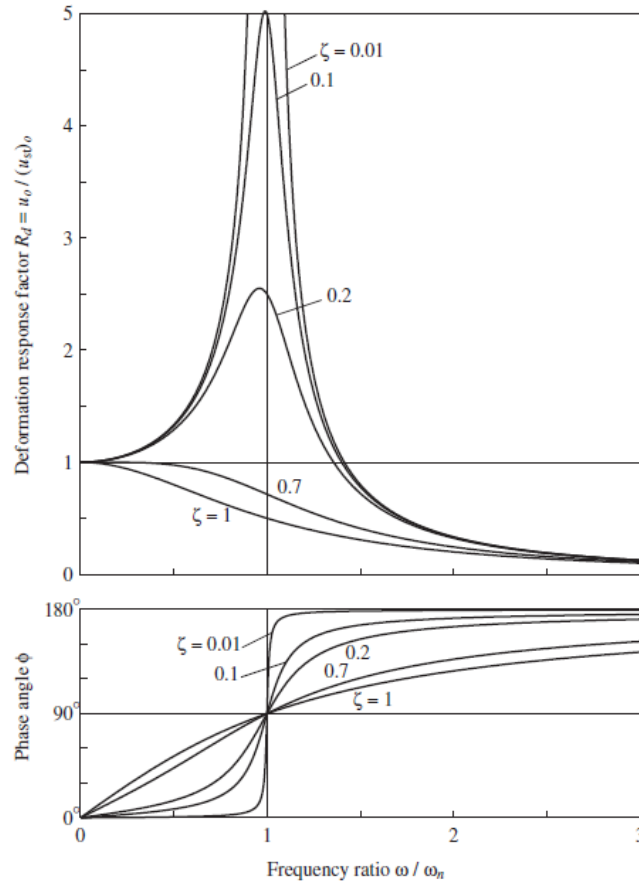
$$X = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \text{ ja } \theta = \tan^{-1} \frac{2\xi r}{1-r^2}, \quad (3.53)$$

missä  $r = \frac{\omega}{\omega_n}$  on herätteen taajuuden ja systeemin ominaiskulmataajuuden suhde. Amplitudia  $X$  kutsutaan nyt vahvistuskertoimeksi.

Kuvassa 16 on esitetty vahvistuskertoimen ja vaihekulman kuvaajat. Vasteen amplitudia herätetaajuuden funktiona kutsutaan taajuusvastefunktioksi. Vaste on kuvattu eri suhteellisten vaimennuskertoimien arvoilla. Kun herätetaajuus lähestyy systeemin ominaiskulmataajuutta eli kun  $r$  lähestyy arvoa 1, amplitudi lähestyy maksimiarvoansa niissä tapauksissa, kun vaimennus on suhteellisen pieni. Vastaavassa tilanteessa vaihekulma lähestyy 90 astetta. Vaimennus pienentää vahvistuskerrointa ja täten vasteen amplitudia kaikilla herätetaajuuksilla. Tämän vähennyksen suuruus on voimakkaasti riippuvainen herätetaajuudesta.

Derivoimalla vahvistuskertoimen lauseke (3.53) kulmataajuuden suhteen, saadaan selville, että vahvistuskertoimen ääriarvo ei ole resonanssikohtassa  $\omega = \omega_n$ , vaan kohdassa  $\omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ , jolloin ääriarvo on

$$X_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (3.54)$$



**Kuva 16.** Vaimennetun systeemin vahvistuskertoimen ja vaihekulma taajuussuhteen funktiona (Chopra 2011, s. 78).

Tavallisesti kuitenkin sanotaan, että vaimenevankin värähtelyn resonanssi on kohdassa  $\omega = \omega_n$ , jolloin resonanssivahvistus  $X_{res} = \frac{1}{2\zeta}$  on hieman maksimivahvistusta (3.54) pienempi. (Salmi & Virtanen 2006, s. 395.)

### 3.2 Usean vapausasteen systeemi

Siirryttäessä yhden vapausasteen värähtelystä useamman vapausasteen värähtelyyn, on huomattava kaksi tärkeää ilmiötä. Ensinnäkin systeemin vapausasteiden määrä kertoo, kuinka monta ominaisarvoa systeemillä on. Lisäksi kahden tai useamman vapausasteen tapauksessa kuvaan astuvat ominaismuodot. Nämä käsitteet liittyvät olennaisesti matriisiteorian ominaisarvoihin ja ominaisvektoreihin ja täten synnyttävät tarpeen tarkastella useamman vapausasteen värähtelyongelmaa vektoreina ja matriiseina. (Inman 2007, s. 270-271.)

### 3.2.1 Ominaisarvo-ongelma

On useita tapoja ratkaista värähtelyongelma ominaisarvo-ongelman avulla. Tehokkain tapa tähän on laskea värähtelyongelma symmetrisenä ominaisarvo-ongelmana. Systemin massa- ja jäykkyyssmatriisi ovat tavallisesti symmetrisiä ja siksi tämän symmetrisyyden säilyttäminen on luonteva lähestyminen värähtelyongelmaan. Ratkaisu perustuu siihen, että koordinaattisysteemi muutetaan sellaiseksi, missä värähtelyongelma esitetään yksittäisenä symmetrisenä matriisina. (Inman 2007, s. 282-283.)

Ominaisarvo-ongelma on mahdollista ratkaista myös muilla keinoin kuin symmetrisenä ominaisarvo-ongelmana. Muita ratkaisumahdollisuuksia ovat yleistetty ominaisarvo-ongelma sekä asymmetrinen ominaisarvo-ongelma. Usean vapausasteen systeemin tapauksessa symmetrinen ominaisarvo-ongelma on näitä tehokkaampi tapa, sillä algoritmit muodostavat normeeratut ominaisvektorit ilman ylimääräisiä laskuvaiheita ja vaadittava tietokoneen suorituskyky on pienin kolmesta vaihtoehdosta. (Inman 2007, s. 294–295.)

Aluksi tulee muodostaa systeemin liikeyhtälö. Usean vapausasteen vaimentamattoman systeemin liikeyhtälö on

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (3.55)$$

jossa  $\mathbf{M}$  on massamatriisi,  $\mathbf{K}$  on jäykkyyssmatriisi,  $\ddot{\mathbf{x}}$  on kiihtyvyydsvektori,  $\mathbf{x}$  on siirtymävektori ja  $\mathbf{0}$  on nollavektori. Mikäli systeemillä on  $n$  vapausastetta, matriisit ovat muotoa  $n \times n$  ja vektorit  $n \times 1$ . (Inman 2007, s. 284.)

Systeemin alkuperäinen koordinaattisysteemi määritellään siis muuttujan  $\mathbf{x}$  avulla. Määritetään uusi koordinaattisysteemi muuttujan  $\mathbf{q}$  avulla. Muunnos näiden välillä tapahtuu massamatriisin käänteisen neliöjuuren avulla, jolloin vektori  $\mathbf{x}$  ilmaistaan

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{q}, \quad (3.56)$$

jossa  $\mathbf{M}^{-1/2}$  on massamatriisin käänteinen neliöjuuri ja  $\mathbf{q}$  on vakiovektori, joka kuvaa uutta koordinaattisysteemiä. Kun yhtälöön (3.55) sijoitetaan yhtälö (3.56) ja kerrotaan tämä yhtälö vielä massamatriisin käänteisellä neliöjuurella  $\mathbf{M}^{-1/2}$ , saadaan

$$\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{M}\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}. \quad (3.57)$$

Koska tiedetään, että  $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{M}\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$  on yksikkömatriisi, yhtälö (3.57) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}, \quad (3.58)$$

missä  $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$  on massanormeerattu jäykkyyssmatriisi, joka on jäykkyyssmatriisin tavoin symmetrinen. Yhtälö (3.58) ratkaistaan käyttämällä ratkaisuyritteenä  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{v}e^{j\omega t}$ , missä  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  on vakiovektori. Jakamalla skalaarilla  $e^{j\omega t}$  yhtälö saa muodon

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{v} = \omega^2\mathbf{v}, \quad (3.59)$$

jossa  $\omega$  on systeemin ominaistaajuus. Huomioitavaa on, että vakiovektori  $\mathbf{v}$  ei voi olla 0, mikäli lopputuloksena on liikettä. Määritetään vielä  $\lambda = \omega^2$ , jolloin yhtälö (3.59) saa muodon

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \quad (3.60)$$

missä  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . Yhtälö on tarkka esitys ominaisarvo-ongelmasta. Siinä vakiota  $\lambda$ , joka toteuttaa yhtälön, kutsutaan ominaisarvoksi ja vektoria  $\mathbf{v}$  ominaisvektoriksi. Ominaisvektorit, jotka toteuttavat yhtälön (3.60), ovat aina ortogonaalisia eivätkä koskaan saa arvoa nolla. Ominaisvektorit voidaan normeerata kaavalla

$$\mathbf{v}_i^{norm} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i}} \mathbf{v}_i, \quad (3.61)$$

jolloin vektorien pituudeksi tulee 1.

Seuraavassa kappaleessa on esitetty ominaisarvo-ongelman ratkaiseminen moodianalyysin avulla, jossa normeerattuja ominaisvektoreita hyödynnetään. Moodianalyysin etu on matriisilaskennan helposti toteutettavissa oleva automatisointi ja se on helposti kirjoitettavissa esimerkiksi yksinkertaisen laskentapohjan muotoon. Ominaisarvo-ongelma voidaan ratkaista myös erilaisin numeerisin menetelmin.

### 3.2.2 Usean vapausasteen vaimentamaton systeemi

Kuten aiemmin kerrottiin, laiteperustus pyritään mallintamaan yhden vapausasteen systeiminä, mutta kytkettyjen värähtelymuotojen tapauksessa käytetään kahden vapausasteen systeemiä. Tässä kappaleessa esitetään useamman vapausasteen vaimentamattoman systeemin ratkaisu moodianalyysin avulla.

Moodianalyysissa suoritetaan koordinaattimuunnos fyysisistä koordinaateista moodikoordinaatteihin ominaismuotomatriisin avulla. Tällä muunnoksella toisistaan riippuvat liikeyhtälöt saadaan muutettua ryhmäksi yhden vapausasteen yhtälöitä eli useamman vapausasteen ongelmat muuttuvat yhden vapausasteen ongelmiksi, jotka ovat yksinkertaista ratkaista. Lopuksi ominaismuotomatriisin avulla ratkaisu palautetaan takaisin fyysisiin koordinaatteihin, jotka vastaavat alkuperäistä ongelmaa. Moodianalyysissa olennaista on, että systeemin värähtelyn vaste voidaan ilmaista ominaismuotojen lineaarikombinaationa. (Inman 2007, s. 295–305.)

Kappaleessa 3.2.1 esitettiin keino määrittää systeemin ominaisvektorit ominaisarvo-ongelman avulla. Nämä ominaisvektorit tulee normeerata kaavan (3.61) mukaisesti. Kappaleessa esitettiin myös uusi koordinaattisysteemi muuttujan  $q$  avulla (Inman 2007, s. 296–305). Määritetään vielä yksi koordinaattisysteemi, jossa muuttujana on  $r$ . Tällöin

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}\mathbf{r}(t), \quad (3.62)$$

missä  $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 \ \mathbf{v}_n]$  on normeeratuista ominaisvektoreista koottu matriisi eli ominaisvektorimatriisi ja  $\mathbf{r}$  on vakiovektori, joka kuvaa uutta koordinaattisysteemiä. Systeemin ominaisvektorit ratkaistaan ominaisarvo-ongelmana. Kun yhtälö (3.62) sijoitetaan aikaisemmin määritettyyn yhtälöön (3.58) ja kerrotaan ominaisvektorimatriisin transpooilla, saadaan

$$\mathbf{P}^T \mathbf{P} \ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{P} \mathbf{r}(t) = \mathbf{0}. \quad (3.63)$$

Tiedetään, että  $\mathbf{P}^T \mathbf{P}$  on yksikkömatriisi, joten yhtälö (3.63) saa muodon

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{\Lambda} \mathbf{r}(t) = \mathbf{0}, \quad (3.64)$$

jossa  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{P}$  on spektrimatriisi. Spektrimatriisi on myös diagonaalimatriisi.

Kirjoitetaan yhtälön (3.64) matriisit auki, jolloin se saa muodon

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r}_1(t) \\ \ddot{r}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{r}_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

Nyt suorittamalla matriisilaskut, matriisiyhtälö (3.65) tiivistyy muotoon

$$\begin{bmatrix} \ddot{r}_1(t) + \omega_1^2 r_1(t) \\ \ddot{r}_2(t) + \omega_2^2 r_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{r}_n(t) + \omega_n^2 r_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

Matriisiyhtälön (3.66) vektoreiden yhtäsuuruus voidaan erottaa omiksi yhtälöiksi

$$\ddot{r}_1(t) + \omega_1^2 r_1(t) = 0$$

$$\ddot{r}_2(t) + \omega_2^2 r_2(t) = 0$$

$$\vdots$$

$$\ddot{r}_n(t) + \omega_n^2 r_n(t) = 0.$$

(3.67)

Yhtälöitä (3.67) kutsutaan moodiyhtälöiksi. Jokainen näistä yhtälöistä riippuu vain yhdestä koordinaatista ja täten jokainen niistä voidaan ratkaista toisista riippumattomasti.

Moodiyhtälöt kuvaavat systeemin alkuperäistä tilaa, joka täytyy myös muuttaa moodikoordinaatistoon. Alkuperäinen koordinaattisysteemi  $x(t)$  muutetaan aiemmin määritettyyn koordinaattisysteemiin  $q(t)$ , joka edelleen muutetaan moodikoordinaatistoon  $r(t)$ . Systeemin alkuperäinen siirtymä moodikoordinaatistossa saadaan kertomalla yhtälö (3.62)  $\mathbf{P}^T$ :lla. Kun käytetään hyväksi tietoa  $\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{I}$ , saadaan

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} r_{10} \\ r_{20} \\ \vdots \\ r_{n0} \end{bmatrix} = \mathbf{P}^T \mathbf{q}(0) = \mathbf{P}^T \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_0 = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}_0, \quad (3.68)$$

missä  $\mathbf{x}_0$  on systeemin alkutilan siirtymävektori ja  $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{P}^T \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}$  ominaismuotomatriisin käänteismatriisi. Ominaismuotomatriisin jokainen pystyrivi koostuu systeemin ominaismuotovektoreista. Vastaavasti systeemin alkuperäinen nopeus moodikoordinaatistossa on

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{r}_{10} \\ \dot{r}_{20} \\ \vdots \\ \dot{r}_{n0} \end{bmatrix} = \mathbf{P}^T \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{P}^T \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{S}^{-1} \dot{\mathbf{x}}_0, \quad (3.69)$$

missä  $\dot{\mathbf{x}}_0$  on systeemin alkutilan nopeusvektori. Ratkaistaan moodiyhtälöt (3.67) kuten yhden vapausasteen vaimentamattoman systeemin tapauksessa yhtälön (3.10) mukaisesti. Ratkaisussa käytetään siirtymävektorin (3.68) ja nopeusvektorin (3.69) arvoja, jolloin ratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \frac{\sqrt{\omega_1^2 r_{10}^2 + \dot{r}_{10}^2}}{\omega_1} \sin\left(\omega_1 t + \tan^{-1} \frac{\omega_1 r_{10}}{\dot{r}_{10}}\right) \\ r_2(t) &= \frac{\sqrt{\omega_2^2 r_{20}^2 + \dot{r}_{20}^2}}{\omega_2} \sin\left(\omega_2 t + \tan^{-1} \frac{\omega_2 r_{20}}{\dot{r}_{20}}\right) \\ &\vdots \\ r_n(t) &= \frac{\sqrt{\omega_n^2 r_{n0}^2 + \dot{r}_{n0}^2}}{\omega_n} \sin\left(\omega_n t + \tan^{-1} \frac{\omega_n r_{n0}}{\dot{r}_{n0}}\right). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Yhtälöiden ominaistajuudet ratkaistaan kappaleen 3.2.1 ominaisarvo-ongelman mukaisesti, jolloin ratkaisut moodikoordinaatistossa tunnetaan. Ratkaisujen palautus alkuperäiseen koordinaatistoon johdetaan sijoittamalla yhtälö (3.62) yhtälöön (3.56), jolloin

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P} \mathbf{r}(t) = \mathbf{S} \mathbf{r}(t). \quad (3.71)$$

Yhtälön (3.71) avulla muutetaan moodikoordinaatisto takaisin alkuperäiseen koordinaatistoon. Näin on saatu ratkaistua systeemin siirtymät alkuperäisessä koordinaatistossa matriisimuunnosten avulla.

Moodianalyysin ratkaisu vaihe vaiheelta:

1. Lasketaan systeemin massamatriisin käänteinen neliöjuurimatriisi  $\mathbf{M}^{-1/2}$ .
2. Lasketaan systeemin massanormeerattu jäykkyysmatriisi  $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2}$ .
3. Muodostetaan symmetrinen ominaisarvo-ongelma  $\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$  ja ratkaistaan systeemin ominaiskulmataajuudet  $\omega_i$  ja ominaisvektorit  $\mathbf{v}_i$ .
4. Normeerataan ominaisvektorit  $\mathbf{v}_i$  ja muodostetaan ominaisvektorimatriisi  $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 \ \dots \ \mathbf{v}_n]$ .
5. Lasketaan systeemin ominaismuotomatriisi  $\mathbf{S} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{P}$  ja sen käänteismatriisi  $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{P}^T \mathbf{M}^{1/2}$ .
6. Lasketaan systeemin alkutilan siirtymä- ja nopeusvektorit moodikoordinaatistossa  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}_0$  ja  $\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{S}^{-1} \dot{\mathbf{x}}_0$ .
7. Sijoitetaan  $\mathbf{r}_0$  ja  $\dot{\mathbf{r}}_0$  moodiyhtälöihin (3.70), jolloin saadaan ratkaisu moodikoordinaatistossa.
8. Muutetaan ratkaisu alkuperäiseen koordinaatistoon kertomalla se ominaismuotomatriisilla yhtälön  $\mathbf{x} = \mathbf{S} \mathbf{r}(t)$  mukaisesti.

### 3.2.3 Usean vapausasteen vaimennettu systeemi

Kun usean vapausasteen systeemin liikeyhtälössä huomioidaan myös vaimennus, liikeyhtälö on muotoa

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (3.72)$$

jossa  $\mathbf{C}$  on vaimennusmatriisi ja  $\dot{\mathbf{x}}$  nopeusvektori. Vaimennuksen mallintamisen vaikeus syntyy siitä, että vaimennus synnyttää ylimääräisen kytkennän liikeyhtälöiden välille ja näitä toisiinsa kytkettyjä yhtälöitä ei voi aina erottaa toisistaan moodimuunnoksen avulla. Vaimennusmatriisin sisältävä liikeyhtälö pystytään ratkaisemaan moodianalyysillä, jos vaimennusmatriisi voidaan kirjoittaa massa- ja jäykkyysmatriisin lineaarikombinaationa  $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$ . (Inman 2007, s. 317–323.) Tällaista vaimennusta kutsutaan Rayleigh-vaimennukseksi, josta on kerrottu tarkemmin kappaleessa 4.2. Moodiyhtälöt (3.67) saadaan nyt muotoon

$$\ddot{r}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{r}_i(t) + \omega_i^2 r_i(t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.73)$$



missä  $2\xi_i\omega_i\dot{r}_i(t)$  on dissipaatiotermi ja  $2\xi_i\omega_i = \alpha + \beta\omega_i^2$ . Yhtälön (3.73) ratkaisu laiteperustuksien kannalta merkittävimmän eli alivaimennetun systeemin tapauksessa jokaisen vapausasteen osalta on sama kuin yhden vapausasteen vaimennetun systeemin ratkaisu (3.21) eli

$$r_i(t) = A_i e^{-\xi_i\omega_i t} \sin(\omega_{di}t + \Phi_i) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.74)$$

Myös yhtälön (3.74) vakiot  $A_i$  ja  $\Phi_i$  ovat samat jokaiselle vapausasteelle kuin yhden vapausasteen vaimennetun systeemin vakiot. Huomioitavaa on, että vakiot (3.24) eivät ole voimassa rajoittamattomalla systeemillä esiintyvän jäykän kappaleen ominaismuodon tapauksessa, jolloin ominaistajuus on 0. Tämä muoto ei ole todellinen värähtelymuoto. Myös vaimennettu ominaiskulmataajuus lasketaan jokaiselle vapausasteelle vastaavasti kuin yhden vapausasteen systeemin kohdalla  $\omega_{di} = \omega_{ni}\sqrt{1 - \xi_i^2}$ . Lopuksi ratkaisu muutetaan takaisin todellisiin koordinaatteihin moodianalyysin avulla samaan tapaan kuin vaimentamattoman systeemin tapauksessa.

### 3.2.4 Usean vapausasteen vaimennettu pakkovärähtely

Kun vaimennettuun systeemiin vaikuttaa harmoninen pakkovoima, liikeyhtälö on

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \cos \omega t, \quad (3.75)$$

jossa  $\mathbf{F}$  on voimavektori. Myös useamman vapausasteen systeemin pakkovärähtelyn vaste voidaan ratkaista moodianalyysin avulla. Edetään liikeyhtälön (3.75) kanssa samalla tavalla kuin usean vapausasteen vaimennetun systeemin kanssa, jolloin saadaan sama yhtälö (3.76) kuin edellä mainitussa tapauksessa, mutta yhtälön oikealle puolelle tulee termi  $f_i \cos \omega t$ . (Inman 2007, s. 323–327.)

$$\ddot{r}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{r}_i(t) + \omega_i^2 r_i(t) = f_i \cos \omega t \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.76)$$

Nyt jokaiselle vapausasteelle voidaan soveltaa samaa menettelyä kuin yhden vapausasteen pakkovärähtelylle. Alikriittiselle systeemille ratkaisut löydetään yhtälön (3.52) avulla.

Kuten yhden vapausasteen pakkovärähtelyn tapauksessa, resonanssi esiintyy myös usean vapausasteen systeemeillä, jolloin harmoninen herätevoima virittää systeemin sen ominaistajuuksilla. Nyt  $n$  vapausasteen systeemeillä esiintyy  $n$  ominaistajuutta ja jokaiseen ominaistajuuteen liittyy sen oma ominaismuoto. Ominaismuodot kuvaavat systeemin massojen suhteellisia siirtymiä, eivät absoluuttisia. Mikäli voimavektori on ortogonaalinen ominaismuodon kanssa, resonanssia ei tapahdu.

## 4. GEODYNAMIIKKA

Geodynamiikka (käytetään myös termiä maadynamiikka) on maamekaniikan sivuhaara, joka käsittelee maan käyttäytymistä dynaamisen jännityksen alaisena. Maamekaniikan isänä pidetään Karl Terzaghia, joka otti termin käyttöön vuonna 1925 julkaistussa kirjassaan *Erdbaumechanik auf Bodenphysikalischer Grundlage*. Teoksen julkaisusta lähtien maamekaniikan teoreettiset ja kokeelliset tutkimukset ovat kehittyneet nopeasti, vaikka tavallisesti suurin huomio onkin keskittynyt staattisiin kuormiin. Erityisesti Japanissa ja Italiassa on tehty uraauurtavaa tutkimusta geodynamiikan saralla. (Prakash 1981, s. 1.)

Nykyaikaiset perustusten värähtelyjen analyysimenetelmät pyrkivät ottamaan huomioon perustuksen ja sitä tukevan maan välisen dynaamisen vuorovaikutuksen (Gazetas 1983, s. 4). Näiden metodien perusta on teoria, joka käsittelee aaltojen etenemistä elastisessa tai viskoelastisessa kiinteässä aineessa. Englanninkielisessä kirjallisuudessa maaperän ja rakenteen välistä vuorovaikutusta eli sitä, kuinka rakenteen liike vaikuttaa maan vasteeseen ja päinvastoin, nimitetään termillä *soil-structure-interaction* (SSI). Tämän rinnalle on kehitetty termit *structure-soil-structure-interaction* (SSSI), joka viittaa maaperän ja useammasta rakenteesta koostuvan systeemin vuorovaikutukseen, sekä *foundation-soil-foundation-interaction* (FSFI), jolla viitataan perustuksen ja maan väliseen vuorovaikutukseen ilman päällysrakenteita. (Lou et al. 2011, s. 1724.)

Herätteen aiheuttama perustuksen värähtely saa maaperässä aikaan aaltoliikettä, joka leviää perustuksen ja maan välisestä rajapinnasta kaikkiin suuntiin. Aallot käyvät läpi lukuisia heijastuksia, taittumisja sekä muodonmuutoksia pinta-aalloiksi vapaan maanpinnan ja maakerrosten vaihtelevien jäykkyyksien johdosta. Suurin osa perustukselta välittyvästä energiasta leviää ulospäin ja alaspäin suuntautuviksi aalloiksi, kun taas pieni osuus kuluu epäelastisiin muodonmuutoksiin maassa. (Gazetas 1991a, s. 553.)

Värähtelystä syntyvien siirtymien maksimiampplitudit rajataan tyypillisesti hyvin pieniksi verrattaessa rajoitukseen, joka asetetaan staattisen kuorman aiheuttamalle perustuksen painumalle. Tästä seuraa, että useimmissa tapauksissa maan muodonmuutokset tapahtuvat elastisesti, mukaan lukien merkityksettömät epälineaarisuudet ja pysymättömät muodonmuutokset. Mahdollisia poikkeuksia ovat matalilla taajuuksilla sivusuunnassa värähtelevät paaluperustukset ja matalien perustusten rotaatio vaaka-akselin ympäri. Täten laiteperustusten analyysissä näillä pienillä amplitudeilla maa oletetaan lineaarisesti viskoelastiseksi, jolloin materiaalista riippuva energian häviäminen mallinnetaan hystereesivaimennuksena.

## 4.1 Aaltoliike maassa

Aallot syntyvät jatkuvassa väliaineessa väliaineen häiritsemisestä. Kun kappaleeseen kohdistetaan voima, koko kappale ei häiriinny kuormitushetkellä. Osat lähimpänä kuormituslähdetä altistuvat ensin ja syntyvät muodonmuutokset leviävät koko kappaleeseen jännitysaaltojen muodossa. Aaltojen eteneminen elastisessa väliaineessa on hyvin keskeinen teema geodynamiikassa, sillä aaltojen nopeudet riippuvat väliaineen elastisista ominaisuuksista. (Prakash 1981, s. 46–62.)

Oletetaan, että ääretön väliaine, minkä läpi aallot kulkevat, on homogeeninen ja isotrooppinen. Tässä yhteydessä ei tarkemmin johdeta aaltojen nopeuksia, joiden teoria pohjautuu lujuusopin jännitys- ja muodonmuutostiloihin. Värähtelevä perustus synnyttää leikkausaaltoja ja puristusaaltoja maahan. Leikkausaallot, joita kutsutaan myös S-aalloiksi, leviävät nopeudella  $V_s$ , missä nopeus riippuu väliaineen leikkausmoduulista eli leikkausjäykkyydestä  $G$  ja tiheydestä  $\rho$  yhtälön

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (4.1)$$

mukaisesti. Puristusaallot eli P-aallot, leviävät nopeudella  $V_p$

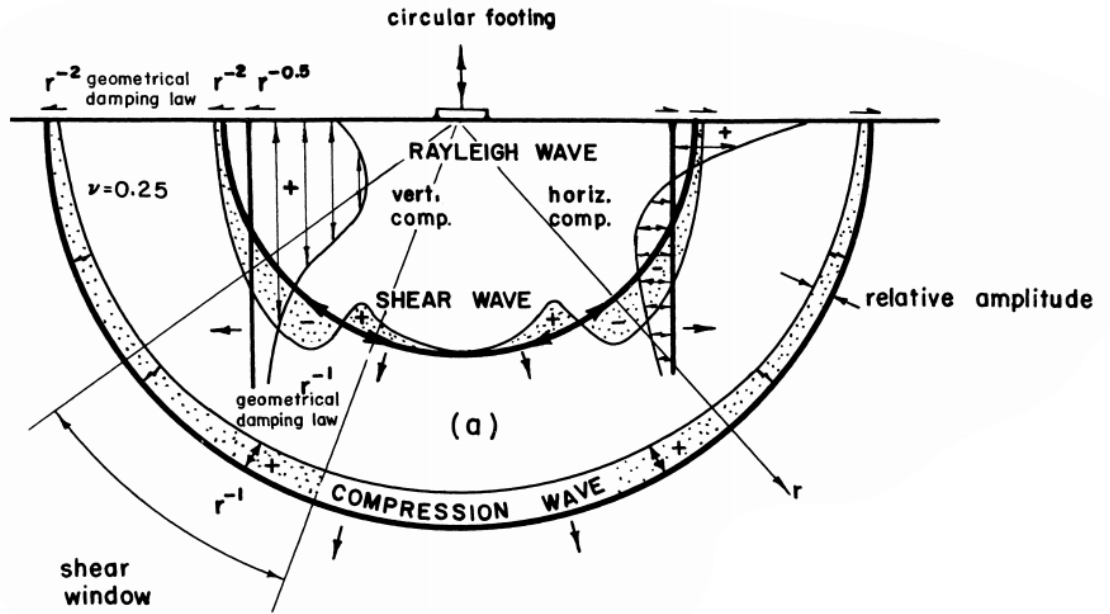
$$V_p = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}, \quad (4.2)$$

missä  $\nu$  on Poissonin luku ja  $E$  kimmomoduuli. Kimmomoduuli, leikkausmoduuli ja Poissonin luku eivät ole toisistaan riippumattomia vaan niille voidaan kirjoittaa yhteys (Salmi & Pajunen 2010, s. 57)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (4.3)$$

Yhtälön (4.3) mukaan siis maan parametreista  $G$ ,  $E$  ja  $\nu$  on tunnettava vain 2, jolloin 3. parametri voidaan laskea.

Yhtälöistä (4.1) ja (4.2) nähdään, että aallot, jotka edustavat erityyppisiä liiketiloja, etenevät väliaineessa eri nopeuksilla. Elastisessa, äärettömässä väliaineessa esiintyy siis edellä mainittuja kahdentyyppisiä aaltoja, joita myös tilavuusaalloiksi kutsutaan. Käytännössä kuitenkin aaltojen jakauman tuntemisella tässä väliaineessa ei ole paljoakaan käytännön hyötyä. Maanvaraisen perustuksen tapauksessa, rajoitusehdot rajaavat tarkastelun semi-äärettömään puoliavaruuteen, jolloin värähtelevän perustuksen alla syntyy myös muita aaltoja, joista merkittävimmät ovat Rayleigh- ja Love-aallot. Kaikki muut aallot riippuvat myös leikkausmoduulista ja Poissonin luvusta, sillä ne ovat S- ja P-aaltojen yhdistelmiä. Kuvassa 17 on kuvattu värähtelevän, pyöreän anturan synnyttämien aaltojen leviämistä elastisen puoliavaruuden mallissa.



**Kuva 17.** Pyöreän anturan synnyttämän aaltojen jakautuminen homogeenisessa, isotrooppisessa, elastisessa puoliavaruudessa (Woods 1968, s. 4).

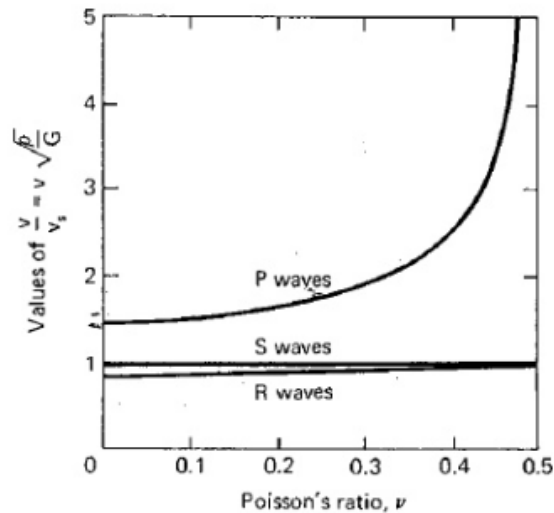
Kuvasta nähdään eri aaltojen etäisyys värähtelylähteestä suhteessa niiden nopeuteen väliaineessa Poissonin luvun ollessa  $\nu = \frac{1}{4}$ . Puristus- ja leikkausaallot leviävät säteittäisesti ulospäin värähtelevästä perustuksesta puolipallonmuotoisessa rintamassa, kun taas Rayleigh-aallot, joita myös R-aalloiksi tai pinta-aalloiksi kutsutaan, leviävät lieriönmuotoisessa rintamassa. Puristusaallon aiheuttama väliaineen partikkelin liikerata on aallon kulkusuunnan suuntainen työntö-vetoliike, kun taas leikkausaallon kohdalla partikkelin liike on poikittaista aallon kulkusuuntaan nähden. Rayleigh-aaltojen aiheuttama partikkelien liikemuoto on retrogradinen ellipsi. P- ja S-aaltojen varjostetut alueet viittaavat väliaineen partikkelin siirtymäamplitudin suhteelliseen arvoon perustuksen keskipisteestä alaspäin mitatun kulman funktiona.

Taulukossa 2 on eritelty puristus- ja leikkausaallon nopeuksia erilaisille maalajeille.

**Taulukko 2.** Puristus- ja leikkausaaltojen nopeuksia eri maalajeille.

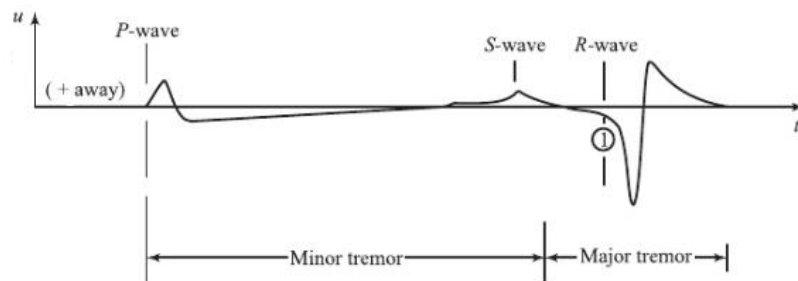
Maatyyppi	Puristusaallon nopeus $V_p$ [m/s]	Leikkausaallon nopeus $V_s$ [m/s]
Hieno hiekka	300	90 – 150
Tiivis hiekka	460	230
Sora	762	180 – 215
Kostea savi	1220 – 1370	150
Graniitti	3960 – 5490	2130 – 3350
Hiekkakivi	1370 – 3960	610 – 2130

Taulukosta nähdään, että puristusaallot etenevät leikkausaaltoja nopeammin, mutta nopeusero riippuu voimakkaasti maalajista, tarkemmin sanoen maan Poissonin luvusta (Das & Ramana 2010, s. 80). Kun Poissonin luku lähestyy arvoa 0,5, lähestyy puristusaallon nopeus väliaineessa ääretöntä, kuten kuvasta 18 on havaittavissa. Rayleigh-aaltojen nopeus on hieman leikkausaaltojen nopeutta pienempi. Materiaalin jäykkyyden kasvaessa kasvavat myös puristus- ja leikkausaaltojen nopeudet.



**Kuva 18.** Puristus-, leikkaus- ja Rayleigh-aaltojen nopeuden riippuvuus Poissonin luvusta semi-äärettömässä elastisessa väliaineessa (Prakash 1981, s. 61).

Maan liiketilaa jollakin etäisyydellä herätelähteestä on kuvattu kuvassa 19. Nopeimmin mittauspisteen saavuttaa väliaineessa eli maassa etenevä puristusaalto, jonka jälkeen tulee leikkausaalto ja viimeisenä Rayleigh-aalto. Rayleigh-aallon aiheuttama maan liike on huomattavasti suurempi kuin puristus- ja leikkausaaltojen aiheuttama. Noin kaksi kolmasosaa kokonaisenergiasta välittyy Rayleigh-aaltojen mukana, jotka vaimenevat etäisyyden värähtelijästä kasvaessa paljon puristus- ja leikkausaaltoja hitaammin. Voidaankin todeta, että Rayleigh-aallot ovat merkittävimpiä maanvaraisten laiteperustusten värähtelyn kannalta.

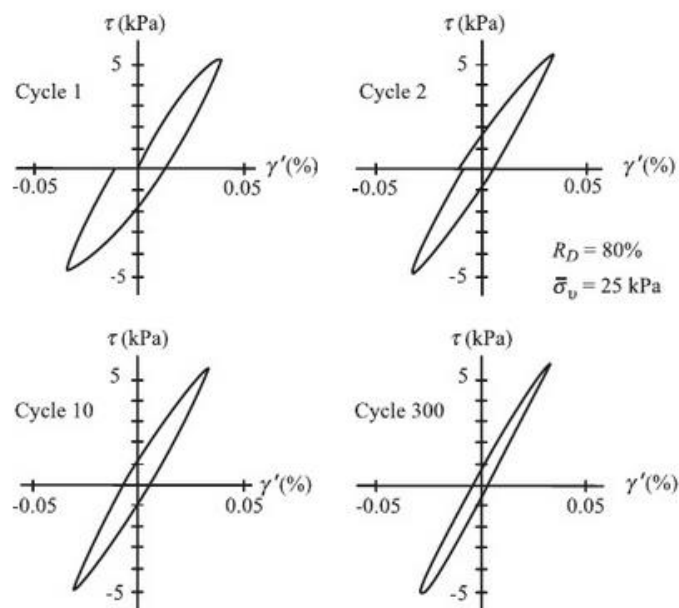


**Kuva 19.** Väliaineen liiketila jollakin etäisyydellä herätelähteestä (Das & Ramana 2010, s. 93).

Fluidit maan huokosissa vaikuttavat aaltojen leviämiseen, joten maan vesipitoisuudella on merkitystä puristusaaltojen etenemisnopeuteen. Koska vesi on suhteellisen puristumaton suhteessa maahan, puristusaallon nopeus vedellä kyllästetyssä maassa edustaa aallon nopeutta vedessä, ei maassa. Toisaalta koska vedellä ei ole leikkauslujuutta, leikkausaallon nopeus vedellä kyllästetyssä maassa riippuu vain maan ominaisuuksista.

Laitteiden synnyttämät dynaamiset kuormat aiheuttavat maahan leikkausvenymiä, jotka ovat tavallisesti huomattavasti staattisen kuorman synnyttämiä venymiä pienempiä. Maan jännitys-muodonmuutos-käyttäytyminen pienillä venymillä onkin paljon jäykempää kuin staattisilla kuormilla, sillä maapartikkelien välistä suhteellista liukumaa ei tapahdu samalla tavalla kuin suurten venymien tapauksessa. Näin ollen leikkausmoduulia ei voi määrittää suoraan staattisen jännitys-muodonmuutos-testin, kuten kolmiaksaalikokeen avulla, ellei maan jännityksiä ja venymiä voida mitata tarkasti pienillä venymän arvoilla. (Arya et al. 1979, s. 62.)

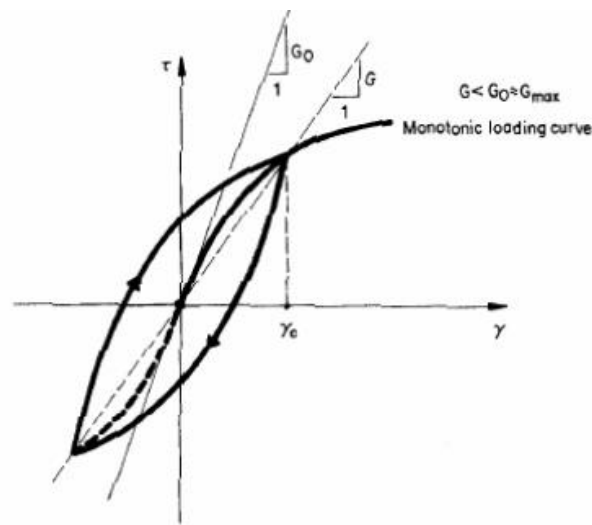
Dynaamisessa kuormituksessa leikkausmoduuli muuttuu toistuvien kuormitus syklien mukaan, kunnes saavutetaan stabiili tila. Silverin ja Seedin (Silver & Seed 1971) tekemässä syklisessä leikkauskokeessa tutkittiin keskitiheän hiekan jännitys-venymä-käyttäytymistä syklisen kuorman vaikutuksen alaisena (kuva 20). (Das & Ramana 2010, s. 121–124.)



**Kuva 20.** Syklisesti kuormitetun maan jännitys-venymä käyttäytyminen eri kuormitusmäärillä.

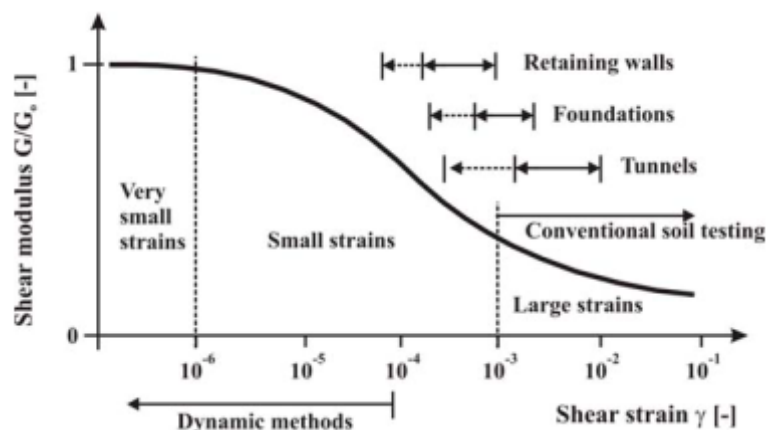
Kokeen mukaan leikkausmoduuli kasvoi kuormitus syklien määrän mukana. Suurin leikkausmoduulin lisäys saavutettiin ensimmäisen kymmenen syklin aikana, minkä jälkeen kasvu oli suhteellisen pientä. Lisäksi kokeessa todettiin, että vakio jännitystasolla ja kuormitus syklien määrällä leikkausmoduuli pieneni venymän kasvaessa. Puolestaan vakio venymällä ja kuormitus syklien määrällä leikkausmoduuli kasvoi jännityksen lisääntyessä.

Todellisuudessa pienilläkin venymän arvoilla maan jännitys-venymä-suhde on epälineaarinen. Kuitenkin hyvin pienillä venymillä (alle 0,005 %) maan muodonmuutos on lähes lineaarielastista, jolloin hystereesisilmukat ovat hyvin kapeita. Tämä on nähtävissä kuvasta 20, jossa hystereesisilmukka on kapeimmillaan suurimman syklimäärän jälkeen. Tällöin maan käyttäytymistä voidaan melko tarkasti kuvata lineaarisena aineena käyttäen leikkausmoduulin hystereesisilmukan origossa määritettyä tangenttiarvoa  $G_0$  ja materiaalinivaimennuskerrointa  $\beta_0$ . Tätä kutsutaan ekvivalentiksi lineaarimalliksi. Samaa menetelyä käytetään myös kuvaamaan maan dynaamista käyttäytymistä suurilla venymillä, mutta tällöin käytetään leikkausmoduulina pienempää sekanttiarvoa  $G$  ja vastaavasti materiaalinivaimennuskerrointa vastaavaa arvoa  $\beta$ , missä  $\beta$  on suurempi kuin  $\beta_0$ . Maan leikkausmoduuli pienillä siirtymillä ja siitä riippuva leikkausaallon nopeus ovatkin tärkeimmät yksittäiset maaparametrit laiteperustusten vasteen kannalta. (Gazetas 1991a, s. 555.)



**Kuva 21.** Leikkausjännitys syklisen venymän funktiona eli hystereesisilmukka.

Kuvassa 21 on esitetty yksinkertaistettu malli symmetrisestä, syklisestä kuormasta aiheutuneesta yhdestä hystereesisilmukasta. Tangenttimoduuli voidaan määrittää mistä tahansa silmukan kohdasta, kun taas sekanttimoduuli on origon ja hystereesisilmukan huipun yhdistävän janan kulmakerroin eli se edustaa silmukan keskimääräistä leikkausmoduulin arvoa. Kun venymä kasvaa, leikkausmoduulin sekanttiarvo vähenee eli suurin leikkausmoduulin arvo saadaan pienillä venymillä. Maan dynaamiset ominaisuudet siis riippuvat venymästä. Venymien kasvaessa maan toiminta alkaa vähitellen muuttua yhä enemmän epälineaariseksi ja suurilla venymien arvoilla tapahtuu pysyviä, plastisia muodonmuutoksia ja lopulta maan murtuminen. Leikkausmoduulin riippuvuutta venymästä on kuvattu kuvassa 22, josta ilmenee venymän suuruusluokan vaikutus leikkausmoduuliin. Hyvin pienillä venymillä ( $<10^{-6}$ ) leikkausmoduuli vastaa leikkausmoduulin maksimiarvoa, mutta tästä venymien kasvaessa tapahtuu leikkausmoduulin voimakas lasku. Useimmille maatyypeille käyrä on kuvatusen muotoinen. (Luna & Jädi 2000, s. 2.)



**Kuva 22.** Normalisoitu leikkausmoduuli venymän funktiona (Atkinson & Sallfors 1991).

Maan venymien liiallisesta kasvusta johtuvien epälineaarisuuksien lisäksi toinen epälineaarisuusongelma on perustuksen ja maan välisessä rajapinnassa, jossa kontakti heikkenee liukumisen ja maamassan irtautumisen johdosta. Tämä kontaktin heikkeneminen voidaan ottaa analyysissä huomioon irrottamalla maakerros tietyltä matkalta perustuksen pystysuuntaisista seinistä eli pienentämällä maan ja perustuksen välistä pystypinta-alaa. Lähellä maanpintaa kontakti häviää lähes aina jo pienillä amplitudeilla pienestä vaakasuuntaisesta maanpaineesta johtuen. Näin ollen useimmissa tapauksissa dynaamisessa analyysissä perustuksen ja maan välisen kontaktipinnan korkeuden tulisi olla perustuksen upotussyvyyttä pienempi. (Gazetas 1991a, s. 575.)

Maan leikkausmoduuli voidaan määrittää kenttä- tai laboratoriomittausten avulla sekä korrelaatiokertoimilla muista helpommin mitattavista ominaisuuksista. Maan leikkausmoduulin arvoon vaikuttavat ainakin seuraavat parametrit: Dynaamisen venymän amplitudi, keskimääräinen tehollinen jännitys, huokoisuusaste, maan rakenne ja rakeiden ominaisuudet, jännityshistoria, värähtelyn taajuus, saturaatioaste sekä lämpötila. Mutta kuten todettua, pienillä venymillä leikkausmoduuli pysyy likimain vakiona, josta johtuen leikkausmoduulia usein käytetään elastisena parametrina. (Arya et al. 1979, s. 62.)

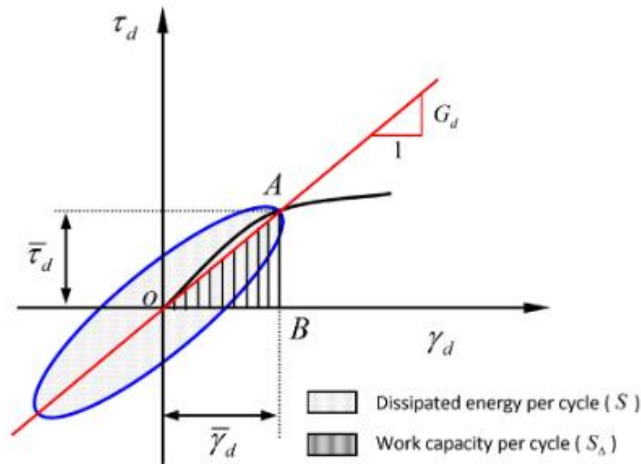
## 4.2 Vaimennus

Elastisen puoliavaruuden mallissa kaikki aallot kohtaavat edetessään lisääntyvän määrän materiaa, jolloin jokaisen aallon energiatiheys vähenee etäisyyden perustuksesta kasvaessa. Tällaista energiatiheyden vähenemistä tai aallon amplitudin pienenemistä kutsutaan geometriseksi vaimennukseksi eli säteilyvaimennukseksi. Puristus- ja leikkausaaltojen amplitudi on kääntäen verrannollinen etäisyyteen säteilylähteestä. Kuitenkin puoliavaruuden pinnan suuntaisesti etenevien S- ja P-aaltojen amplitudi on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön säteilylähteestä. Rayleigh-aaltojen amplitudi on puolestaan kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöjuureen. (Prakash 1981, s. 68.)



Materiaalivaimennus eli hystereesivaimennus on materiaalin luontainen ominaisuus, jossa energiaa kuluu hystereesin seurauksena. Edellisessä kappaleessa todettiin, että leikkausmoduulin eli jäykkyyden pienentyessä maan venymä kasvaa. Tällöin myös maan kyky vaimentaa dynaamisia kuormia kasvaa. Tämä johtuu siitä, että energiaa kuluu kitkan, lämmön sekä plastisen myötäämisen johdosta. (Luna & Jadi 2000, s. 2.)

Hystereesisilmukan pinta-ala kuvaa yhden syklin aikana menetetyn energian määrää ja kuvan 23 rasteroitu kolmio yhden syklin maksimienergiaa (Ling et al. 2015, s. 114).



**Kuva 23.** Suhteellisen vaimennuskertoimen määrittäminen hystereesisilmukasta.

Hystereesisilmukasta voidaan määrittää systeemin suhteellinen vaimennuskertoimen kyseisellä venymän amplitudilla yhtälön (4.4) mukaisesti:

$$\xi = \frac{S}{4\pi S_D}, \quad (4.4)$$

missä  $S$  on hystereesisilmukan pinta-ala ja  $S_D$  kolmion OAB pinta-ala. Vakio jännitystasolla ja venymällä suhteellinen vaimennuskertoimen pienenee syklien määrän noustessa. Vastaavasti vakio jännitystasolla ja syklien määrällä, suhteellinen vaimennuskertoimen pienenee venymän pienentyessä.

Systeemin kokonaisvaimennus on geometrisen vaimennuksen ja materiaalivaimennuksen summa. Se kumpi vaimennustavoista on merkittävämpi, riippuu systeemin värähtelymuodosta. Materiaalivaimennuksen merkitys on huomattava rotaatiovärähtelyn tapauksessa, jolloin dynaamisessa analyysissä on suositeltavaa huomioida kokonaisvaimennus pelkän säteilyvaimennuksen sijaan. Toisaalta, translaatiovärähtelyn kohdalla materiaalivaimennuksen rooli ei ole merkittävä ja sen huomioiminen analyysissä ei välttämättä ole tarpeellista. (Chowdhury & Dasgupta 2008, s. 61.)

Tietokonepohjaista dynaamista laskentaa varten on kehitetty erilaisia maamalleja, jotka muun muassa ottavat huomioon plastiset venymät ja saattavat aiheuttaa materiaali-vaimennusta. Kuitenkaan tämä vaimennus ei yleensä ole riittävää mallintamaan todellisen maan vaimennusominaisuuksia. Geometrisen ja materiaalivaimennuksen lisäksi onkin kehitetty keinotekoinen Rayleigh-vaimennus, joka sopii paremmin maan dynaamisten vaimennusominaisuuksien mallintamiseen. Siinä vaimennusmatriisi  $\mathbf{C}$  määritellään kaavalla

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}, \quad (4.5)$$

missä  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat Rayleigh-kertoimet,  $\mathbf{M}$  massamatriisi ja  $\mathbf{K}$  jäykkyysmatriisi. Vaimennusmatriisi kuvaa maan materiaalivaimennusta. Kertoimet määrittelevät massan ja jäykkyyden vaikutuksen systeemin vaimennuksessa. Mitä suurempi  $\alpha$  on yhtälössä (4.5), sitä enemmän alataajuudet on vaimennettu ja mitä suurempi  $\beta$  on, sitä enemmän ylätaajuudet on vaimennettu. (Plaxis 3D - Reference Manual, 2018, s. 163.)

Rayleigh-kertoimille ei ole toistaiseksi pystytty kehittämään yleisesti hyväksyttyä määrittäytapaa. Insinöörien tarpeita varten on kuitenkin kehitetty yhteys yleisesti käytetyn suhteellisen vaimennuskertoimen ja Rayleigh-kertoimien välille:

$$\alpha + \beta \omega^2 = 2\omega\xi. \quad (4.6)$$

Yhtälöstä (4.6) kertoimet  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat ratkaistavissa yhtälöparina, kun valitaan kaksi haluttua taajuutta ja niitä vastaavat suhteelliset vaimennuskertoimet. Valittaessa kaksi taajuutta, kertoimien yhtälöt saadaan muotoon

$$\alpha = \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} (\omega_2\xi_1 - \omega_1\xi_2) \quad (4.7)$$

$$\beta = \frac{2\omega_2\xi_2 - 2\omega_1\xi_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}. \quad (4.8)$$

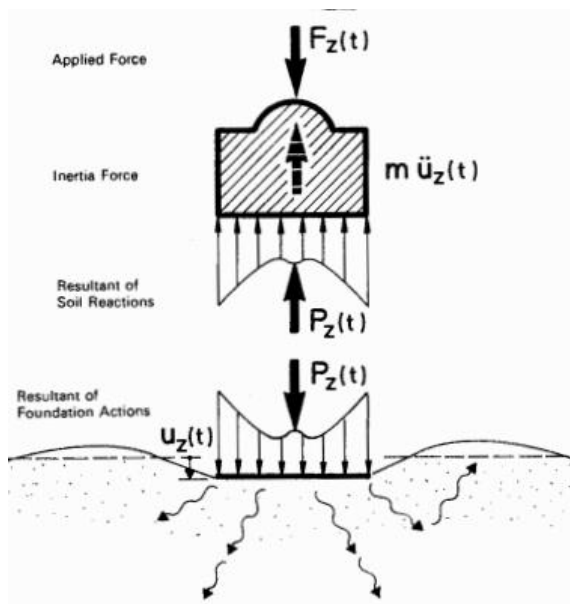
Rayleigh-vaimennuksen etu on siinä, että vaimennusmatriisin muuttaminen Rayleigh-vaimennukseksi ortogonaalimuunnosta käyttäen usean vapausasteen systeemi voidaan esittää toisistaan riippumattomien eli kytkemättömien yhtälöiden avulla. Mitä suurempi on systeemin vapausasteiden määrä, sitä hankalampi kertoimet on määrittää. (Chowdhury & Dasgupta 2003, s. 2.)

Numeerisella vaimennuksella ei ole yhteyttä todelliseen maan vaimennuskäyttäytymiseen vaan se syntyy dynaamisessa laskennassa käytettävästä numeerisesta aikaintegroinnista. Aikaintegroinnissa on valittava aika-askeleen pituus, joka on käytännössä aina kompromissi tarkkuuden ja nopeuden välillä. Mitä pienempi aika-askel on, sitä tarkempi tulos on, mutta sitä enemmän laskenta-aikaa se vaatii. Numeerista vaimennusta syntyy, kun tietyn aikaintegrointimenetelmän aika-askeleesta johtuen osa taajuuksista vaimentuu pois. (Bouzonni 2013, s. 23.)

### 4.3 Impedanssifunktiot

Merkittävä kehityssaskel massiivisten laiteperustusten dynaamisen analyysin nykyisissä menetelmissä on ollut dynaamisten impedanssifunktioiden määrittäminen todellista tilanetta vastaavalle jäykälle, mutta massattomalle perustukselle. Tällaisen systeemin pysyvän värähtelyn vaste voidaan laskea dynamiikan keinoin, kun dynaamiset impedanssifunktiot on määritetty halutuille herätetaajuuksille. Impedanssifunktiot määritellään jokaiselle herätetaajuudelle voiman ja siitä syntyvän pysyvän, massattoman perustuksen pohjan keskiön siirtymän suhteena. Toisin sanoen impedanssifunktiot kuvaavat perustuksen ja maan välisen vuorovaikutuksen taajuusriippuvaisia jäykkyys- ja vaimennusominaisuuksia. (Gazetas 1991b, s. 1363–1365.)

Tarkastellaan Gazetasin (Gazetas 1991a, s. 564–571) esityksen mukaista systeemiä, jonka voidaan ajatella koostuvan kahdesta kappaleesta, perustuksesta ja maasta. Jäykän, massan  $m$  omaavan perustuksen lävistää pystysuuntainen symmetria-akseli  $z$  maan ja perustuksen välisen kosketuspinnan keskiössä. Perustukseen kohdistuu pystysuuntainen harmoninen voima  $F_z(t)$  symmetria-akselia pitkin, jolloin perustuksen siirtymä  $u_z(t)$  on mahdollinen vain pystysuunnassa. Maa koostuu vaakasuuntaisista, lineaarisesti muuttuvista maa-kerroksista. Kappaleiden vapaakappalekuvat on esitetty kuvassa 24.



**Kuva 24.** Pystysuuntaisesti värähtelevän perustuksen ja sen alapuolisen maan vapaakappalekuvat (Gazetas 1991a, s. 565).

Perustuksen värähtely synnyttää maahan yhtä suuret, mutta vastakkaisuuntaiset reaktiot, jotka jakautuvat rajapinnalle tuntemattomalla tavalla tukireaktion resultantin  $P_z(t)$  ollessa myös tuntematon. Upotettujen perustusten tapauksissa kokonaistukireaktio koostuu perustuksen pohjan vastaisten normaalijännitysten lisäksi myös pystypintojen suuntaisista leikkausjännityksistä. Koska kappaleet pysyvät todellisuudessa aina kontaktissa, niiden siirtymät ovat identtiset. Täten perustuksen dynaaminen tasapainoyhtälö on

$$P_z(t) + m\ddot{u}_z(t) = F_z(t). \quad (4.9)$$

Maan tukireaktio  $P_z(t)$  lineaarisesti muuttuville maakerroksille voidaan esittää muodossa

$$P_z(t) = \tilde{K}_z u_z(t), \quad (4.10)$$

missä  $\tilde{K}_z$  on dynaaminen pystysuuntainen impedanssi. Maan tukireaktion määritelmän (4.10) sijoittaminen tasapainoyhtälöön (4.9) johtaa muotoon

$$m\ddot{u}_z(t) + \tilde{K}_z u_z(t) = F_z(t). \quad (4.11)$$

Kuten aiemmin todettiin, dynaaminen impedanssi määritellään voiman (tai momentin) ja siitä syntyvän pysyvän värähtelyn siirtymän (tai kiertymän) suhteena. Impedanssit esitetään tavallisesti kompleksimuodossa, sillä maan tukireaktiolla  $P_z(t)$  ja siitä syntyvällä siirtymällä  $u_z(t)$  on sama herätekulmataajuus  $\omega$ , mutta eri vaihe, jolloin kompleksimuotoinen esitys on sekä laskennallisesti helpompi että esitysmuodoltaan hienostuneempi. Näin ollen dynaaminen pystysuuntainen impedanssi määritellään

$$\tilde{K}_z = \frac{P_z(t)}{u_z(t)} = \frac{\bar{P}_z}{\bar{u}_z}, \quad (4.12)$$

missä  $\bar{P}_z$  ja  $\bar{u}_z$  ovat  $P_z(t)$ :n ja  $u_z(t)$ :n kompleksimuotoiset esitykset. Dynaaminen impedanssi voidaan myös ilmaista muodossa

$$\tilde{K}_z = \bar{K}_z + i\omega C_z, \quad (4.13)$$

jossa sekä  $\bar{K}_z$  että  $C_z$  ovat herätetaajuuden funktioita. Yhtälön reaalikomponentti  $\bar{K}_z$  eli dynaaminen jäykkyys kuvaa maan jäykkyys- ja hitausominaisuuksia, kun taas imaginäärikomponentti  $\omega C_z$  on herätekulmataajuuden ja vaimennuskertoimen tulo, joka kuvaa systeemin säteily- ja materiaalivaimennusta. Yhtälö (4.13) pätee kaikille perustus-maa-systeemeille. Dynaamisen jäykkyyden ja vaimennuskertoimen määritelmät ovat todistettavissa sijoittamalla yhtälö (4.13) yhtälöön (4.11), jolloin liikeyhtälö saadaan muotoon

$$m\ddot{u}_z(t) + C_z \dot{u}_z(t) + \bar{K}_z u_z(t) = F_z(t). \quad (4.14)$$

Yhtälö (4.14) on yksinkertaisen värähtelijän liikeyhtälö, joka on verrattavissa aiemmin määritellyn vaimenevan pakkovärähtelyn liikeyhtälöön (3.42). Tässä tapauksessa  $\bar{K}_z$  ja  $C_z$  eivät ole kuitenkaan vakioita, sillä ne riippuvat herätekulmataajuudesta. Yhtälö esittää pystyvärähtelyn moodin vastaavuuden todellisen perustus-maa-systeemin sekä teoreettisen systeemin välillä, jossa perustus on tuettu jousen ja vaimentimen välityksellä jäykkään maahan kuvan 25 mukaisesti.

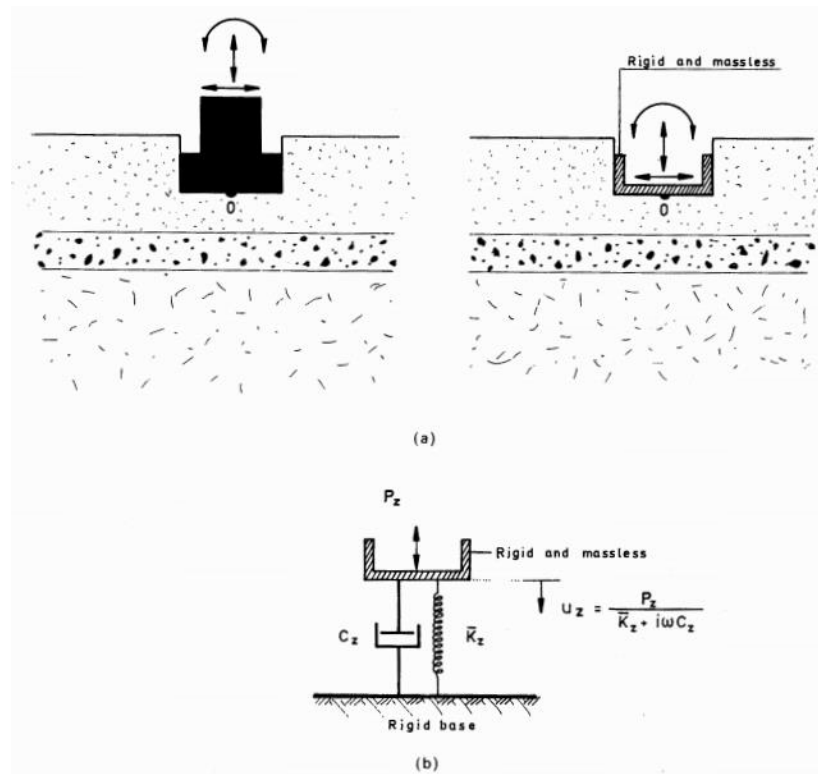
Liikeyhtälön ratkaisu on

$$\bar{u}_z = \frac{F_z}{(\bar{K}_z - m\omega^2) + i\omega C_z}, \quad (4.15)$$

josta värähtelyn amplitudi saadaan itseisarvona

$$u_z = |\bar{u}_z| = \frac{F_z}{\sqrt{(\bar{K}_z - m\omega^2)^2 + \omega^2 C_z^2}}. \quad (4.16)$$

Täten maan tukireaktio pystysuunnassa värähtelevää perustusta vasten on määritelty kokonaan kompleksisella taajuusriippuvaisella dynaamisella impedanssilla  $\tilde{K}_z(\omega)$  ja halutun herätetaajuuden amplitudi saadaan ratkaisua yhtälöllä (4.16), kunhan parametrit  $\bar{K}_z(\omega)$  ja  $C_z(\omega)$  on määritetty. Yhden vapausasteen värähtelijän reaali-osa on yhtälön (4.15) nimittäjän mukaisesti  $\bar{K}_z - m\omega^2$  ja imaginääriosa  $\omega C_z$ .



**Kuva 25.** a) Todellinen perustusrakenne sekä jäykän ja massattoman perustuksen malli b) Pystysuunnassa värähtelevän perustuksen dynaamisen jäykkyyden ja vaimentimen tulkinta (Gazetas 1991a, s. 567).

Kuten kappaleessa 2.5 todettiin, jäykällä laiteperustuksella on 6 vapausastetta. Yhtälön (4.12) mukainen dynaamisen impedanssin määritelmä pystysuuntaiselle herätteelle soveltuu myös kaikille muille vapausasteille. Täten sivusuuntainen impedanssi  $\tilde{K}_y$  määritellään vaakasuuntaisen harmonisen voiman ja voiman suuntaisen harmonisen siirtymän suhteena yhtälön (4.17) mukaisesti:

$$\tilde{K}_y = \frac{P_y(t)}{u_y(t)} = \frac{\bar{P}_y}{\bar{u}_y}. \quad (4.17)$$

Vastaavasti pituussuuntainen impedanssi  $\tilde{K}_x$  määritellään samalla tavalla. Rotaatioimpedanssit  $\tilde{K}_{rx}$ ,  $\tilde{K}_{ry}$  ja  $\tilde{K}_{rz}$  määritetään vastaavalla tavalla, mutta momentin ja siitä syntyvän

kiertymän suhteena. Tavallisesti vaaka-akselien suunnassa tapahtuvaa perustuksen liikettä kutsutaan heilunnaksi ja vaaka-akselien ympäri tapahtuvaa rotaatiota keinunnaksi.

Kuuden yksittäisen impedanssin lisäksi on myös kaksi kytkettyä impedanssia. Upotetuilla perustuksilla ja paaluilla vaakasuuntaiset voimat synnyttävät rotaatioliikettä translaatioliikkeen lisäksi. Toisin sanoen heiluntavärähtelyä y-akselin suunnassa ei voi tapahtua ilman keinuntavärähtelyä x-akselin ympäri. Vastaavasti x-akselin suuntainen translaatio ja y-akselin ympäri tapahtuva rotaatio ovat kytkettyjä. Tämä johtuu perustuksen hitaudesta ja siitä, että massakeskipiste on maan tukireaktion yläpuolella. Täten, mikäli perustus on alun perin siirtynyt vain vaakasuunnassa, hitausvoimat syntyvät perustuksen massakeskipisteessä ja synnyttävät momentin perustuksen pohjaan. Täten perustus myös keinuu. Tällaisessa tapauksessa puhutaan kytketyistä impedansseista  $\tilde{K}_{xry}$  ja  $\tilde{K}_{yrx}$ , joiden vaikutus on tavallisesti olematon matalien perustusten tapauksessa, mutta joiden vaikutus saattaa tulla merkitseväksi perustussyvyyden kasvaessa. Paalujen tapauksessa kytketyt impedanssit ovat yhtä merkittäviä kuin kytkemättömät.

Yhden vapausasteen systeemeille impedanssifunktion käänteisarvoa eli siirtymän ja sen aiheuttaneen voiman suhdetta kutsutaan komplianssifunktioksi tai taajuusvastefunktioksi. Kytketyille värähtelymuodoille se määritellään impedanssimatriisin käänteismatriisina. Taajuusvastefunktio saadaan muodostettua joko mitatun datan tai analyyttisen ratkaisun avulla. (Gazetas 1983, s. 8; Mbawala 2015, s. 2-13.)

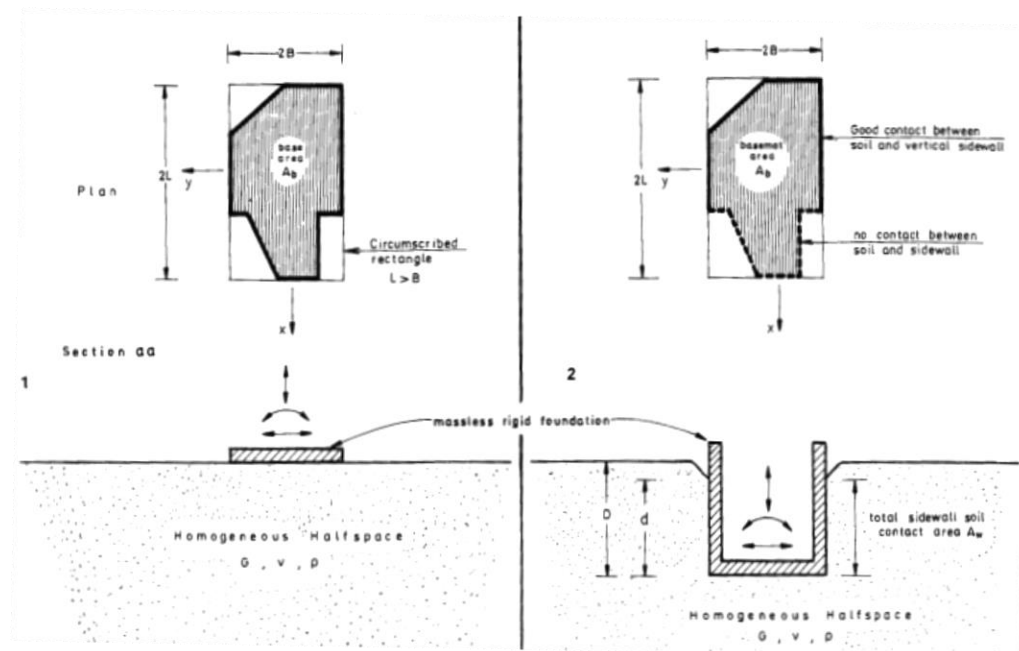
Impedanssifunktioiden laskemiseen, toisin sanoen jousi- ja vaimennuskertoimien määrittämiseen, on useita erilaisia menetelmiä, jotka voidaan jakaa neljään eri kategoriaan. Menetelmän valinta riippuu suuressa määrin vaaditusta tarkkuudesta. Analyyttiset ja semi-analyyttiset menetelmät ottavat huomioon maan monikerroksisuuden ja suorakulmaiset pintaperustukset, mutta eivät sovellu yleensä upotettujen perustusten analysointiin. Dynaamiset elementtimenetelmät hallitsevat niin pinta-, upotetut- kuin paaluperustukset, mutta monet näistä menetelmistä rajoittuvat ympyränmuotoisten tai jatkuvien perustuksien käsittelyyn. Yhdistetyt analyyttiset-numeeriset menetelmät pyrkivät hyödyntämään sekä analyyttisen että numeerisen lähestymistavan etuja. Likiarvoiset menetelmät puolestaan yksinkertaistavat monimutkaisten ongelmien fysiikan, joita ei voida käsitellä tarkasti.

Vaihtoehtoinen lähestyminen impedanssifunktioiden määrittämiseen on helppokäyttöisten lausekkeiden ja kuvaajien kehittäminen. Tässä työssä hyödynnetään professori George Gazetasin yhteistyössä kollegoidensa kanssa kehittämää yhtälöitä ja kuvaajia (Gazetas 1991a, s. 569–581), joissa on esitetty kokonaisvaltaiset sekä helppokäyttöiset tiedot dynaamisten jousi- ja vaimennuskertoimien määrittämiseen. Tässä työssä näistä käytetään nimitystä Gazetasin yhtälöt. Gazetas on kehittänyt kaikkien värähtelymoodien ratkaisut. Ne on esitetty yksinkertaisten yhtälöiden ja dimensiottomien kuvaajien muodossa,

kattaen laajan joukon idealisoituja maaprofiileja sekä perustusmuotoja. Monissa tapauksissa yhtälöiden avulla kyetään arvioimaan todellista ongelmaa riittävällä tarkkuudella. Yleisesti, virhemarginaalin uskotaan olevan reilusti hyväksyttävän 15 %:n sisäpuolella.

Gazetasin yhtälöt käsittelevät 6 erilaista tapausta:

- 1) Mielivaltaisen muotoinen pintaperustus homogeenisen puoliavaruuden päällä.
- 2) Mielivaltaisen muotoinen, osittain tai kokonaan upotettu perustus homogeenisessä puoliavaruudessa.
- 3) Pintaperustus kallioperään tukeutuvan homogeenisen maakerroksen päällä (pääasiassa ympyränmuotoiset ja jatkuvat perustukset).
- 4) Osittain tai kokonaan upotettu perustus kallioperään tukeutuvassa homogeenisessä maakerroksessa (pääasiassa ympyränmuotoiset ja jatkuvat perustukset).
- 5) Nelikulmaiset ja jatkuvat perustukset epähomogeenisen profiilin päällä, jossa maan leikkausjäykkyys kasvaa syvyyden funktiona.
- 6) Vaakasuunnassa värähtelevät yksittäiset kelluvat paalut epähomogeenisessa ja homogeenisessa maakerroksessa tai puoliavaruudessa.



**Kuva 26.** Maa-perustus-systeemien periaatekuvat tapauksille 1-2 (Gazetas 1991a, s. 570).

Perustusten siirtymät ja kiertymät lasketaan aina jonkin referenssipisteen suhteen. Pintaperustusten tapauksessa tämä on tavallisesti perustuksen pohjan keskipisteessä. Upotettujen perustusten kohdalla kirjallisuudessa käytetään vaihtelevia referenssipisteitä, joista yleisimpiä ovat pohjan keskipiste, massakeskipiste ja yläpinnan keskipiste. Gazetasin yhtälöiden referenssipiste on perustuksen pohjan keskipisteessä, kuten kuvan 26 upotetun

perustuksen periaatekuvasta selviää. Tätä käytetään myös tässä työssä. Koordinaattimuunnoksen avulla referenssipiste olisi mahdollista asettaa mihin tahansa perustuksen kohtaan. (Bouzonni 2013, s. 60.)

Tässä kappaleessa esitetyn teorian pohjalta Gazetasin yhtälöiden avulla on koottu laskentapohja, jonka avulla voidaan laskea erilaisten perustustapausten amplitudit halutuilla heijätekulmataajuuksilla. Laskentapohja soveltuu yllä olevan listan tapauksille 1 ja 2, sillä ne ovat tämän työn kannalta tarkoituksenmukaisimpia. Pintaperustusten tapauksessa laskentapohja kattaa pystyväärhtelyn, vaakaväärhtelyn molempien vaaka-akselien suunnassa sekä rotaatioväärhtelyn molempien vaaka-akselien ympäri. Upotettujen perustusten tapauksessa huomioidaan myös vaaka- ja rotaatioväärhtelyn kytketyt muodot. Rotaatioväärhtelyä z-akselin ympäri ei huomioida, sillä se on merkityksellinen lähinnä ympyrämuotoisten perustusten tapauksessa, joita ei tyypillisesti käytetä. Laskentapohjan tarkoitus on mahdollistaa laiteperustusten värähtelyongelman analyysi riittävällä tarkkuudella nopeasti ja vaivattomasti päivittäisessä insinöörityössä. Laskentapohja on esitetty liitteessä 1 siihen liittyvien kuvaajien kanssa.

#### 4.3.1 Pintaperustus

Mielivaltaisen muotoisen pintaperustuksen impedanssifunktioiden (tapaus 1) määrittämiseen tarvittavat parametrit on esitetty alla olevassa listassa:

- perustuksen geometria
  - perustuksen ympäröivän, suorakaiteen muotoisen alueen pidemmän sivumitan puolikas  $L$  kuvan 26 mukaisesti
  - perustuksen ympäröivän, suorakaiteen muotoisen alueen lyhyemmän sivumitan puolikas  $B$  kuvan 26 mukaisesti
  - Perustuksen korkeus  $H$
  - perustuksen ja maan välinen kontaktipinta-ala  $A_b$
  - perustuksen ja maan välisen kontaktipinta-alan neliömomentti x-akselin ympäri  $I_{bx}$
  - perustuksen ja maan välisen kontaktipinta-alan neliömomentti y-akselin ympäri  $I_{by}$
  - perustuksen ja maan välisen kontaktipinta-alan polaarinen neliömomentti z-akselin ympäri  $J_b$
  - perustuksen hitausmomentti x-akselin ympäri  $J_x$
  - perustuksen hitausmomentti y-akselin ympäri  $J_y$
- maan ominaisuudet
  - leikkausmoduuli  $G$
  - kimmomodulaari  $E$
  - Poissonin vakio  $\nu$



- maan tiheys  $\rho$
- leikkausaallon nopeus  $V_s$
- Lysmerin analogian mukainen aallon nopeus  $V_{La} = \frac{3,4}{\pi(1-\nu)} V_s$
- materiaalivaimennuskerroin  $\beta_0$
- heräte
  - herätekulmataajuus  $\omega$
  - dimensioton taajuus  $\alpha_0 = \frac{\omega B}{V_s}$ .
  - voiman amplitudi  $F_{max}$
  - momentin amplitudi  $M_{max}$

Gazetasin yhtälöitä hyödyntäessä y-akseli on perustuksen lyhyemmän sivun suuntainen, x-akseli perustuksen pidemmän sivun suuntainen kuvan 26 mukaisesti.

Mikäli kontaktin menetys joiltakin osin maan ja perustuksen välillä on todennäköistä, voidaan harkinnanvaraisesti vähentää tämän osan myötävaikutusta. Tällainen tapaus saat-  
taa tulla kysymykseen esimerkiksi perustuksen kulmissa rotaatiovärähtelyn kohdalla.

Dynaaminen jäykkyys  $\bar{K}(\omega)$  määritellään taulukoista saatavien staattisen jäykkyyden  $K$  ja dynaamisen jäykkyykskerroimen  $k(\omega)$  tulona, yhtälön (4.18) mukaisesti

$$\bar{K}(\omega) = Kk(\omega). \quad (4.18)$$

Kuten yllä esitetystä yhtälöstä nähdään, dynaaminen jäykkyys sekä dynaaminen jäyk-  
kyyskerroin riippuvat herätekulmataajuudesta, kun taas perustuksen staattinen jäykkyys  
riippuu maan leikkausmoduulista  $G$  ja Poissonin vakioista  $\nu$ .

Säteilyvaimennuskerroin  $C_{rad}(\omega)$  ei sisällä lainkaan maan materiaalivaimennusta. Tämä  
voidaan kuitenkin tarvittaessa huomioida laskennassa, jolloin kokonaisvaimennus saa-  
daan yhtälöllä

$$C(\omega) = C_{rad}(\omega) + \frac{2\bar{K}}{\omega} \beta_0, \quad (4.19)$$

missä  $\beta_0$  on materiaalivaimennuskerroin.

Haluttujen värähtelymoodien staattisen jäykkyyden, dynaamisen jäykkyykskerroimen sekä  
säteilyvaimennuskertoimen määrittäminen tapahtuu suoraviivaisesti Gazetasin yhtälöillä, jonka  
jälkeen yhtälöillä (4.18) ja (4.19) saadaan muodostettua dynaaminen jäykkyys ja koko-  
naisvaimennus impedanssifunktioiden muodostamiseen.

### 4.3.2 Upotettu perustus

Upotettujen perustusten impedanssien määrittämiseen tarvittavat parametrit, pintaperustusten laskennassa käytettävien lisäksi, on esitetty alla olevassa listassa:

- perustuksen geometria
  - perustuksen alapinnan ja maanpinnan välinen korkeus  $D$
  - perustuksen pystyseinien ja maan välinen kontaktipinta-ala  $A_w$
  - keskimääräinen pystyseinien korkeus, jolla hyvä maakontakti  $d$
  - perustuksen tehokkaiden pystypintojen painopisteen etäisyys maanpinnasta  $h$
  - y-akselin suuntaisten pystypintojen ja maan välinen kontaktipinta-ala  $A_{w,y}$
  - x-akselin suuntaisten pystypintojen ja maan välinen kontaktipinta-ala  $A_{w,x}$
  - y-akselin suuntaisten sivuseinien polaaristen neliömomenttien summa perustustasossa sijaitsevan, x-akselin suuntaisen akselin ympäri  $J_{w,y}$
  - x-akselin suuntaisten sivuseinien polaaristen neliömomenttien summa perustustasossa sijaitsevan, y-akselin suuntaisen akselin ympäri  $J_{w,x}$
  - y-akselin suuntaisten sivuseinien neliömomenttien summa niiden perustustasossa sijaitsevan, y-akselin suuntaisen akselin ympäri  $I_{w,y}$
  - x-akselin suuntaisten sivuseinien neliömomenttien summa niiden perustustasossa sijaitsevan, x-akselin suuntaisen akselin ympäri  $I_{w,x}$

Hyvän maakontaktin määrittelyssä on huomioitava, että perustuksen pystyseinien ja maan välisen kontaktipinnan korkeus on tyypillisesti pienempi kuin upotussyvyys, sillä maanpinnan lähellä saattaa tapahtua liukumista sekä erottumista. Dynaamisen analyysin tekijän on itse arvioitava, voidaanko ylimpiä maakerroksia pitää riittävän tiiviinä, jotta ne voidaan huomioida tehokkaassa kontakti-alassa.

Upotettujen perustusten impedanssien laskennassa edetään vastaavasti kuin pintaperustustenkin kohdalla, sillä erotuksella, että staattisen jäykkyyden, dynaamisen jäykkyyser-toimen sekä säteilyvaimennuskertoimen kaavat ovat nyt erilaiset. Lisäksi on huomioitava kytketty vaaka- ja rotaatiovärähtely, kuten edellä todettiin. Kytketyn värähtelyn kohdalla on käytännöllistä esittää impedanssit matriisimuodossa (Bouzoni 2013, s. 82–87.)

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2 + i\omega\mathbf{C}, \quad (4.20)$$

jossa  $\tilde{\mathbf{K}}$  on impedanssimatriisi,  $\mathbf{K}$  on staattinen jäykkyydematriisi,  $\mathbf{M}$  on massamatriisi ja  $\mathbf{C}$  vaimennusmatriisi. Dynaaminen impedanssimatriisi (4.20) voidaan y-akselin suuntaisen vaakavärähtelyn ja x-akselin ympäri tapahtuvan rotaatiovärähtelyn tapauksessa esittää matriisimuodossa

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_y & \tilde{K}_{yrx} \\ \tilde{K}_{rxy} & \tilde{K}_{rx} \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

missä

$$\tilde{K}_y = \bar{K}_y + i\omega C_y$$

$$\tilde{K}_{yrx} = \bar{K}_{yrx} + i\omega C_{yrx}$$

$$\tilde{K}_{rxy} = \bar{K}_{rxy} + i\omega C_{rxy}$$

$$\tilde{K}_{rx} = \bar{K}_{rx} + i\omega C_{rx}.$$

Koska tiedetään, että

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{X}}, \quad (4.22)$$

missä  $\tilde{\mathbf{X}}$  kompleksinen siirtymämatriisi, siirtymä  $u$  ja kiertymä  $\varphi$  voidaan esittää matriisimuodossa voiman maksimiarvon  $F_{max}$  ja momentin maksimiarvon  $M_{max}$  avulla käyttäen hyväksi yhtälöitä (4.21) ja (4.22)

$$\begin{bmatrix} u \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_y & \tilde{K}_{yrx} \\ \tilde{K}_{rxy} & \tilde{K}_{rx} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_{max} \\ M_{max} \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Tarkasteltaessa yksittäistapausta, jossa voima ja momentti eivät vaikuta samanaikaisesti, yhtälö (4.23) voidaan ilmaista muodossa

$$\begin{bmatrix} u_F & u_M \\ \varphi_F & \varphi_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_y & \tilde{K}_{yrx} \\ \tilde{K}_{rxy} & \tilde{K}_{rx} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_{max} & 0 \\ 0 & M_{max} \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

missä  $u_F$  on referenssipisteen siirtymä voiman vaikutuksesta,  $u_M$  on siirtymä momentin vaikutuksesta,  $\varphi_F$  on kiertymä voiman vaikutuksesta ja  $\varphi_M$  on kiertymä momentin vaikutuksesta. Matriisiyhtälö (4.24) on auki kirjoitettuna

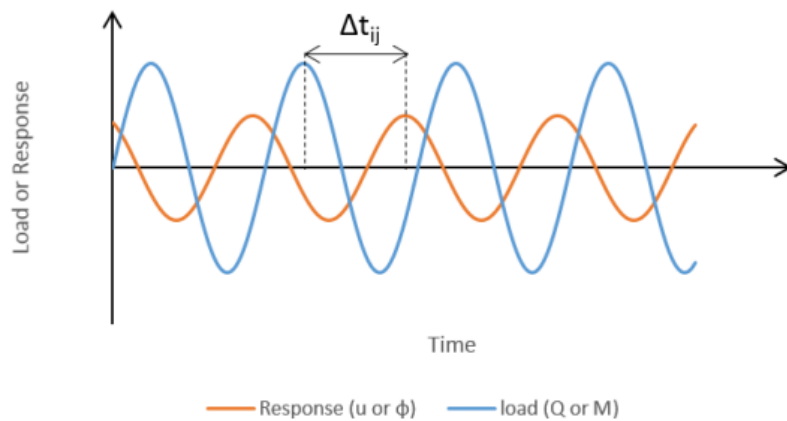
$$\begin{cases} F_{max} = \tilde{K}_y u_F + \tilde{K}_{yrx} \varphi_F \\ 0 = \tilde{K}_{rxy} u_F + \tilde{K}_{rx} \varphi_F \\ 0 = \tilde{K}_y u_M + \tilde{K}_{yrx} \varphi_M \\ M_{max} = \tilde{K}_{rxy} u_M + \tilde{K}_{rx} \varphi_M \end{cases}. \quad (4.25)$$

Lopuksi yhtälöryhmästä (4.25) pystytään ratkaisemaan perustuksen siirtymät ja kiertymät, kun impedanssit tunnetaan.

Plaxiksen tapauksessa tilanne on päinvastainen eli ohjelman vasteesta amplitudi on luetavissa, mutta impedansseja ei ole suoraan saatavilla. Impedanssien määrittäminen tapahtuu laskemalla vasteen vaihekulma  $d_{ij}$  kaavalla

$$d_{ij} = \omega \Delta t_{ij}, \quad (4.26)$$

missä  $\Delta t_{ij}$  on vasteen ja herätteen amplitudien välinen aikaero kuvan 27 mukaisesti. Alaindeksi  $i$  viittaa siirtymään  $u$  tai kiertymään  $\varphi$  ja  $j$  viittaa voimaan  $F$  tai momenttiin  $M$ .



**Kuva 27.** Vasteen ja herätteen vaihe-ero (Bouzoni 2013, s. 87).

Sinisen käyrän kuvaama heräte on vaihekulman verran vastetta jäljessä. Herätteen amplitudin paikka on ratkaistavissa yhtälöstä (6.3). Kun vaihekulma on ratkaistu yhtälöllä (4.26), vasteen reaali- ja imaginääriosia voidaan esittää vaihekulman avulla

$$Re(u_F) = u_F \cos(d_{uF}) \quad (4.27)$$

$$Im(u_F) = u_F \sin(d_{uF}). \quad (4.28)$$

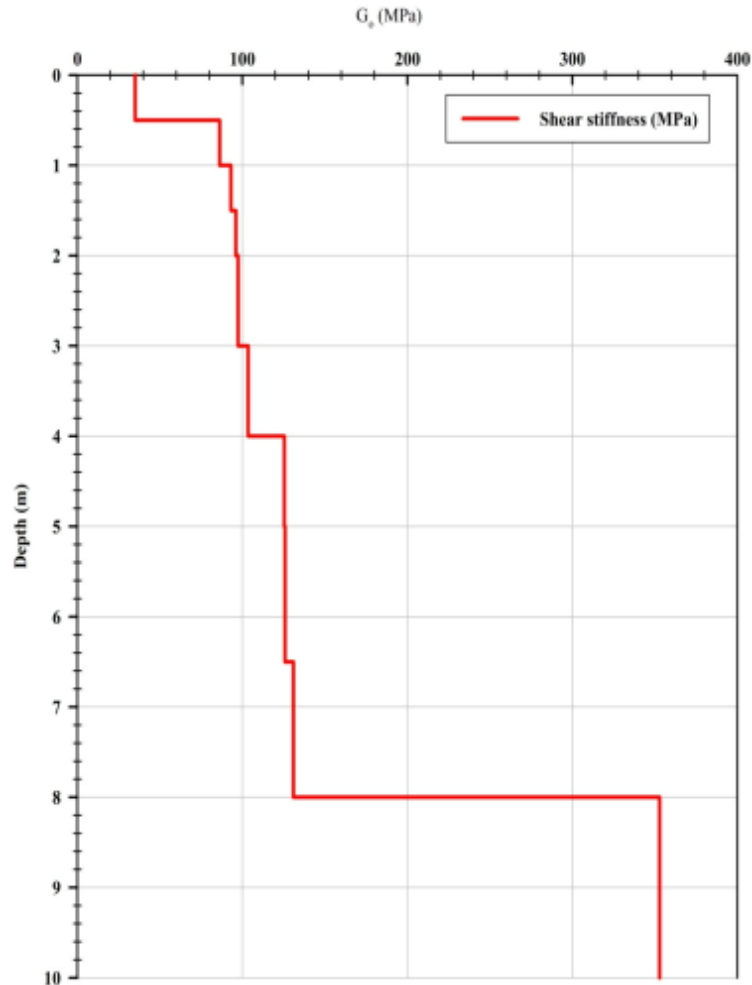
Vastaavasti yhtälöt ovat voimassa myös arvoilla  $u_M$ ,  $\varphi_F$  ja  $\varphi_M$ . Tärkeä on huomata, että yhtälöt kuvaavat vasteen reaali- ja imaginääriosaa, eivät dynaamisen impedanssin. Dynaamisten impedanssien reaali- ja imaginääriosat voidaan ratkaista yhtälöstä (4.16) yhtälöiden (4.27) ja (4.28) avulla, kun siirtymä ja vaihekulma tunnetaan.

## 5. VERTAILUTUTKIMUKSEN KOEKUORMITUKSET

Analyyttisen ja numeerisen menetelmän realistisuuden tueksi työssä vertaillaan näillä menetelmillä saatuja tuloksia todellisiin, kokeellisiin menetelmin saatuihin tuloksiin. Vertailututkimuksena toimii Mbawalan väitöstyö (Mbawala 2015), jossa pystysuunnassa dynaamisesti kuormitetun, upotetun, maanvaraisen perustuksen vaste määritettiin eri upotussyvyyksillä. Tutkimus suoritettiin Pretorian yliopiston koelaitoksella, Etelä-Afrikassa. Tutkimuksessa käsiteltiin myös pintaperustusta, mutta sitä ei tämän työn puitteissa huomioida. Tutkimus koostui koe kuormituksista, kerätyn datan analysoinnista ja tilanteen mallintamisesta analyttisin ja elementtimenetelmään perustuvien menetelmin. (Mbawala 2015, s. 1-4.)

Maaparametrien määrittäminen oli välttämätöntä ennen varsinaisten perustusten dynaamisten koe kuormitusten aloittamista. Vaihtoehtona maan ominaisuuksien selvittämiseksi ovat laboratorioissa suoritettavat testit ja kenttämittaukset. Laboratoriotestit vaativat häiriintymättömiä maanäytteitä, joiden saaminen saattaa olla vaikeaa hiekan ja soran kaltaisten materiaalien tapauksessa sekä joskus jopa mahdotonta lohkaraisen maaperän kohdalla. Seismiset kenttämittaukset ovat suosittu menetelmä maan jäykkyyden määrittämiseen. Mittaukset suoritetaan mittaamalla Rayleigh-aaltojen leviämistä maanpinnassa, sillä ne mahdollistavat maan ominaisuuksien määrittämisen sen todellisessa tilavuudessa in-situ jännitystilassa. (Mbawala 2015, s. 3-1.)

Tutkimuksen kenttätutkimukset sisälsivät koe kuopan kaivamisen ja leikkausaallon nopeuden määrittämisen CSW-testillä (Continuous Surface Wave testing). Koe kuopasta, jonka mitat olivat 2000 mm x 1500 mm x 1500 mm, määritettiin maan yleiseksi profiiliksi silttisestä savesta koostuva andesiitti. CSW-testissä maahan kohdistettiin pystysuuntainen heräte taajuusvälillä 6 Hz – 85 Hz. Herätelähteenä käytettiin kahta eripainoista sekoitinta, jotka tuottivat sinimuotoisen herätteen. Kevyempi, 20 kg painava sekoitin synnytti suurempia taajuuksia ja lyhyitä Rayleigh-aaltoja matalille syvyyksille, kun taas painavampi, 71,4 kg painava sekoitin synnytti matalampia taajuuksia ja näin syvemmälle maahan tunkeutuvia, pidempiä Rayleigh-aaltoja. Herätteen aiheuttama vaste mitattiin eri etäisyyksille herätelähteen reunasta sijoitetuilla maan nopeuden vastetta mittaavilla geofoneilla. Kerätyn datan pohjalta maan leikkausmoduuli kyettiin laskemaan ja se on esitetty kuvassa 28.



**Kuva 28.** Maan mitattu leikkausmoduuli eri syvyyksillä.

Tutkimuksen varsinaisissa dynaamisissa mittauksissa upotetun, paikallavaletun betonisen perustuksen koko on 1200 mm x 1200 mm x 1240 mm. Se valettiin 1240 mm syvän kuopan pohjalle, jolloin perustuksen yläpinta on samalla tasolla maanpinnan kanssa. Perustuksen kaivanto täytettiin 310 millimetrin paksuisilla maakerroksilla ja jokainen kerros tiivistettiin käsikäyttöisellä täryttimellä. (Mbawala 2015, s. 3-5.)

Kuten kappaleessa 2.2 mainittiin, Novakin mukaan perustuksen upottaminen maahan on ilmiönä monimutkainen ja riippuu ajasta, joka vaikuttaa perustuksen sivupintojen ja maan välisen kontaktin tartuntaan. Siksi tutkimuksessa perustus jätettiin maahan upotetuksi 12 kuukauden ajaksi perustuksen ja maan välisen kontaktin parantamiseksi ennen värähtelytestien suorittamista. Upotettu perustus ennen ympärystäyttöä on nähtävissä kuvassa 29.



**Kuva 29.** Upotettu perustus ennen täyttöö.

Tutkimuksessa käytetty kalusto jakautuu kahteen osaan: Laitteisiin, joita käytettiin herätteen synnyttämiseen ja laitteisiin, joilla taltioitiin perustuksen vasteet. Herätelähteenä käytettiin hydraulista, 361,4 kg painavaa sekoitinta, jonka sisäinen massa pääsi liikkumaan 25 mm suuntaansa. Sisäistä massaa liikutettiin hydraulilla voimanlähteillä pumpattavan öljyn avulla. Sisäisen massan liike tietyllä taajuudella synnyttää voiman sekoittimen pohjaan. Sekoitin kiinnitettiin keskelle perustusta valun aikana upotettujen pulttien avulla. Keskeisellä sijoituksella pyrittiin välttämään kytkettyjen värähtelymuotojen syntyminen. (Mbawala 2015, s. 3-3.)

Perustuksen kiihtyvyydet mitattiin kahden 1 g:n kiihtyvyysanturin avulla, jotka oli sijoitettu 200 mm etäisyydelle sekoittimen reunasta. Lisäksi varmistukseksi käytettiin kahta 4g:n kiihtyvyysanturia, joiden dataa tutkimuksessa ei kuitenkaan esitetä. Sekoittimen aiheuttaman voiman amplitudi mitattiin sekoittimen pohjaan kiinnitetyn kuormakennon avulla. Mitattu data kerättiin talteen erityisellä PC Spider-8 tiedonhankintajärjestelmällä. Ennen vasteen tallennusta varmistettiin, että pysyvän värähtelyn tila oli saavutettu. Perustuksen pystysuuntaiset dynaamiset vasteet laskettiin koekuormituksissa mitattujen kiihtyvyyksien pohjalta kaksoisintegroimalla.

Ensimmäisenä suoritettiin täysin upotetun perustuksen koekuormitus, jonka jälkeen poistettiin aina 310 mm maakerros kerrallaan ja suoritettiin koekuormitukset osittain upotetulle perustukselle. Viimeiseksi perustuksen värähtelyä mitattiin 0 millimetrin upotussyvyydellä. Tutkimuksessa käytetyt upotussyvyyydet olivat 0 mm, 310 mm, 620 mm, 930

mm ja 1240 mm, missä 0 mm upotussyvyys tarkoittaa perustusta ilman ympärystäyttyä ja 1240 mm upotussyvyys täysin upotettua perustusta.

Herätteen synnyttämiseen käytetyn sekoittimen voiman amplitudi ei ole vakio vaan taajuusriippuvainen. Tutkimuksen tuloksissa perustuksen siirtymävaste on esitetty sekä todellisen amplitudin (mm), missä voima muuttuu taajuuden muuttuessa, että yksikkövoiman aiheuttaman amplitudin suhteen (mm/N). Yksikkövoiman aiheuttamassa siirtymävastekuvaajasta resonanssitaajuudet eri syvyyksillä ovat helposti tulkittavissa, kun taas todellisen amplitudin kohdalla amplitudihuippuja voi muodostua useampi. Esimerkiksi upotussyvyyden ollessa 0 mm todellisessa siirtymävasteessa on kaksi selkeää amplitudihuippua, kun taas yksikkövoiman aiheuttamassa vasteessa amplitudihuippu on vain resonanssitaajuuden kohdalla. Vastekuvaaja esitetään kohdassa 7.1.1.

Impedanssifunktiot laskettiin voiman amplitudin ja siirtymäamplitudin suhteen taajuuskaistoittain ja niistä eriteltiin reaalinen osa ja imaginäärinen osa. Lisäksi impedanssifunktioiden pohjalta määritettiin vaihekulmat, komplianssifunktiot sekä kiihtyvyyden taajuusvastefunktiot. Vertailututkimuksen amplitudit ja impedanssifunktioiden reaali- ja imaginääriosat on esitetty kappaleessa 7.



## 6. NUMEERINEN MALLI PLAXIS 3D:LLA

Plaxis 3D on kolmiulotteinen, elementtimenetelmään pohjautuva ohjelma, joka on kehitetty erilaisten geoteknisten muodonmuutos-, stabiliteetti- ja virtausanalyysien tekemiseen. Ohjelma hyödyntää erilaisia maamalleja maan käyttäytymisen kuvaamisessa. Plaxista, kuten mitään muutakaan vastaavaa ohjelmaa, ei voi taata täysin virheettömäksi. Lisäksi geoteknisten ongelmien simulointi elementtimenetelmän avulla sisältää väistämättömiä numeerisia ja mallinnukseen liittyviä virheitä. Tulosten tarkkuus riippuu suuresti käyttäjän ammattitaidosta mallintaa ongelma, valita oikeat parametrit, arvioida tulosten luotettavuutta sekä ymmärtää maamalleja ja niihin liittyviä rajoitteita. Tästä syystä ohjelman käyttäjien on hallittava edellä mainitut asiat. Tässä työssä hyödynnetään ohjelman dynamiikka-lisämoduulia, jonka avulla voidaan tutkia värähtelyjä maassa ja värähtelyjen vaikutuksia läheisiin rakenteisiin sekä suorittaa maanjäristysanalyysyjä. (Plaxis 3D - General Information, 2018, s. 6.)

### 6.1 Newmarkin menetelmä

Integroinnin yhteydessä numeerisia menetelmiä käytetään aina silloin, kun funktiosta tiedetään vain yksittäisiä pisteittäisiä arvoja tai kun se ei ole ilmaistavissa suljetussa muodossa. Numeerisiin menetelmiin voidaan turvautua myös silloin, kun analyttinen ratkaisu on hyvin työläs. Tällöin numeerinen menetelmä saattaa olla nopeuden lisäksi myös tarkempi. (Haataja et al. 2002, s. 149.)

Plaxiksen dynaaminen laskenta perustuu numeeriseen aikaintegrointiin. Aikaintegroinnilla viitataan ajasta riippuvien differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen. Aikaintegrointi on tyypillistä ajasta riippuvissa dynaamisissa ongelmissa, joissa halutaan ratkaista systeemin dynamiikka. Ajasta riippuvaa formulaatiota voidaan hyödyntää myös ajasta riippumattoman ratkaisun etsintään. Aikaintegroinnin formulaatio toimii tärkeänä osana laskentaprosessin vakaudessa ja tarkkuudessa. Kaksi yleisesti käytettyä aikaintegrointitapaa ovat eksplisiittinen ja implisiittinen integrointi. Plaxis käyttää Newmarkin menetelmän mukaista implisiittistä aikaintegrointia. Implisiittinen menetelmä on eksplisiittistä monimutkaisempi, mutta se tuottaa vakaamman laskentaprosessin ja yleensä tarkemmat tulokset. (Haataja et al. 2002, s. 255; Plaxis 3D - Scientific Manual, 2018, s. 49–50.)

Newmarkin menetelmä perustuu oletukseen, että kiihtyvyys muuttuu lineaarisesti kahden ajanhetken välillä. Menetelmä voidaan kirjoittaa yhtälömuodossa

$$u^{t+\delta t} = u^t + \dot{u}^t \delta t + \left( \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{u}^t + \alpha \ddot{u}^{t+\delta t} \right) \delta t^2 \quad (6.1)$$

$$\dot{u}^{t+\delta t} = \dot{u}^t + ((1 - \beta) \ddot{u}^t + \beta \ddot{u}^{t+\delta t}) \delta t. \quad (6.2)$$

Yhtälöissä (6.1) ja (6.2)  $u^t$ ,  $\dot{u}^t$  ja  $\ddot{u}^t$  ovat siirtymä, nopeus ja kiihtyvyys ajanhetkellä  $t$  ja vastaavasti  $u^{t+\delta t}$ ,  $\dot{u}^{t+\delta t}$  ja  $\ddot{u}^{t+\delta t}$  siirtymä, nopeus ja kiihtyvyys ajanhetkellä  $t + \delta t$ .  $\delta t$  on käytetty aika-askel. Kertoimet  $\alpha$  ja  $\beta$  määrittävät menetelmän vakauden ja tarkkuuden.

Newmarkin menetelmä on ehdoitta stabiili mikäli  $\beta \geq 0,5$  ja  $\alpha \geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \beta\right)^2$ . Ehtojen toteutuessa ratkaisu on stabiili. Plaxis käyttää oletuksena kertoimille arvoja  $\alpha = 0,25$  ja  $\beta = 0,5$ , jolloin menetelmä tunnetaan keskimääräisen kiihtyvyyden menetelmänä tai trapsikaavana. Kertoimien arvoja voi tarvittaessa vaihtaa, mikä ei ole suotavaa, ellei käyttäjä ole perehtynyt tarkemmin kertoimien vaikutukseen. Tämän työn laskennassa käytetään oletuskertoimia. (Kouhia & Tuomala 2009, s. 357.)

## 6.2 Laskentamalli

Suoritettaessa Plaxis 3D-ohjelmalla elementtimenetelmään perustuva analyysi, on aluksi luotava kolmiulotteinen, pisteistä, viivoista, pinnoista, tilavuuksista ja muista komponenteista koostuva geometriamalli ja määriteltävä materiaaliominaisuudet sekä reunaehdot. Ohjelman mallinnusprosessi koostuu karkeasti viidestä eri vaiheesta: Maakerrosten määrittäminen, rakenteellisten komponenttien ja kuormien luominen, mallin elementtiverkko, vesiolosuhteiden asettaminen sekä laskenta-asetusten määrittäminen. Kappaleen tiedot pohjautuvat pääasiassa Plaxisin manuaaliin (Plaxis 3D - Reference Manual, 2018.)

Geometriamallin luonnissa pyritään jäljittelemään mahdollisimman tarkasti vertailututkimuksen koekuormitusmallia. Värähtelylähde on vertailuaineiston mukaisesti 1,2 m x 1,2 m x 1,24 m kokoisin betoniperustuksen päällä. Sekä maa että perustus mallinnetaan tilavuuselementteinä. Maan vaikutusta perustuksen värähtelyyn tutkitaan neljällä eri upotussyvyydellä sekä ilman upotusta. Värähtelyt mallinnetaan harmonisena pystysuuntaisena herätteenä jäykälle perustukselle, jonka kautta värähtelyt siirtyvät maahan. Plaxisissa dynaamiset kuormat mallinnetaan määrittelemällä staattisille kuormille dynaaminen kerroin, joka määrää herätteen muodon. Harmonisille kuormille tulee määrätä taajuus, amplitudi ja vaihekulma. Harmonisen herätteen muoto on

$$F = \hat{M}\hat{F} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (6.3)$$

missä  $\hat{M}$  on amplitudikerroin,  $\hat{F}$  kuorman suuruus ja  $\varphi_0$  alkuvaihekulma asteina. Amplitudikerroin ja kuorman suuruus muodostavat dynaamisen kuorman amplitudin.

Plaxisissa on valittavana useita erilaisia materiaalimalleja. Tavallisesti lineaarielastinen malli (LE-malli) ei sovellu maalle käytettäväksi, sillä todellisuudessa maan käyttäytymisen on voimakkaasti epälineaarista ja palautumatonta. Tässä työssä kuitenkin käytetään LE-mallia, sillä maassa voidaan olettaa tapahtuvan vain hyvin pieniä venymiä dynaamisen kuormituksen aikana. Esimerkiksi Juuti (Juuti 2016) tutki työssään paalutettuja laiteperustuksia LE-mallia käyttäen, jolloin tulokset olivat lähes yhteneviä mitattujen kanssa.

Lineaarielastinen malli perustuu suoraan Hooken lakiin ja se ei huomioi lainkaan materiaalivaimennusta vaan vaimennus koostuu vain säteilyvaimennuksesta. Materiaalivaimennus voidaan tarvittaessa huomioida Rayleigh-vaimennuksen avulla, mutta sitä ei tässä työssä hyödynnetä, sillä pystyvärähtelyn tapauksessa sen merkitys on hyvin pieni.

Maan ominaisuudet syötetään ohjelmaan porausreikien avulla. Porausreikien kohdalla mallissa annetaan maakerrosten ja pohjaveden sijainnit. Mikäli porausreikiä on useampi, ohjelma interpoloi automaattisesti maakerrosten sijainnit porausreikien välillä. Koska vertailututkimuksessa ei pohjaveden korkeutta kerrota, jätetään se pois laskuista. Maa on mallinnettu kahtena kerroksena vertailututkimuksessa annettuihin tietoihin perustuen. Maakerrosten ja perustuksen parametrit on esitetty taulukossa 3. Maakerrokset on mallinnettu avoimena tilana (drained), sillä kyseessä on kuiva maaperä. Betoninen perustus on määritetty ei-huokoiseksi materiaaliksi ja maakerrosten tapaan myös siinä käytetään LE-mallia.

**Taulukko 3.** *Materiaaliparametrit.*

	Kerros 1	Kerros 2	Perustus
Syvyys D [m]	0-0,5	0,5-8	
Tilavuuspaino $\rho$ [kN/m <sup>3</sup> ]	20	20	24
Kimmomoduuli E [MPa]	87,5	282,5	35000
Poissonin luku $\nu$	0,25	0,25	0,20
Leikkausmoduuli G [MPa]	35	113	14580
Leikkausaallon nopeus $V_s$ [m/s]	131	235,4	2442

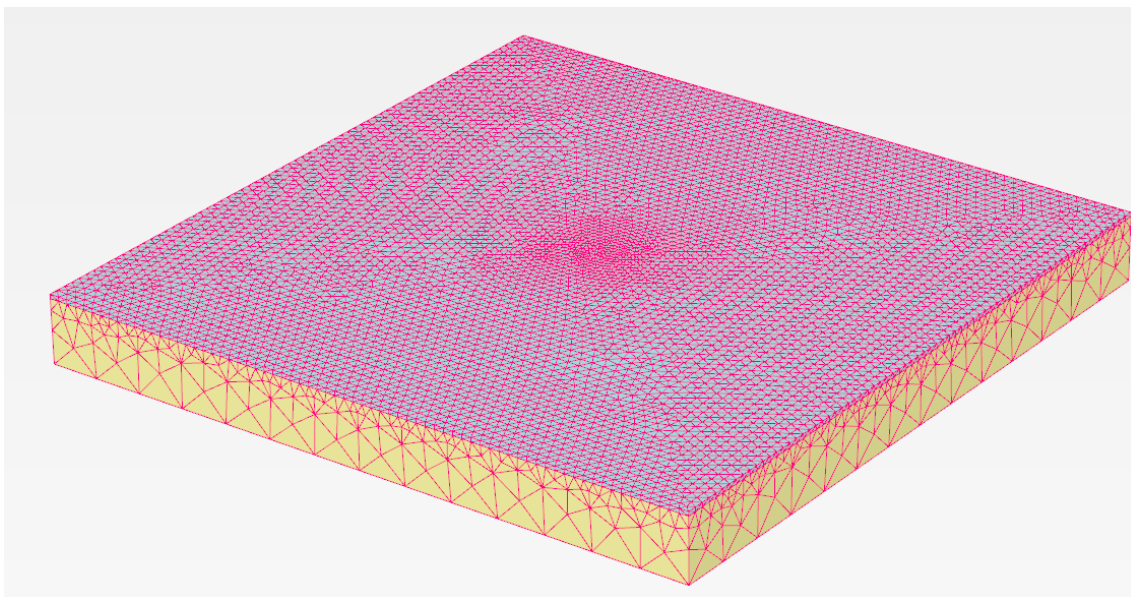
Elementtiverkotus tarkoittaa geometriamallin diskretisointia ja muuttamista elementtime-netelmämalliksi. Plaxiksessa elementtiverkotus tapahtuu automaattisesti valittujen parametrien mukaan. Ohjelman tyypilliset maaelementit ovat 10-solmuisia tetraedrielementtejä. Muita elementtejä ovat 3-solmuiset viivaelementit palkeille, 6-solmuiset levy- ja lujiteverkkoelementit ja 12-solmuiset rajapintaelementit. Keskimääräinen elementtikoko voidaan esittää seuraavan yhtälön mukaan:

$$\Delta l = \frac{r_e}{20} * \sqrt{(x_{max} - x_{min})^2 + (y_{max} - y_{min})^2 + (z_{max} - z_{min})^2}. \quad (6.4)$$

Yhtälössä (6.4) juuren sisäpuoliset muuttujat kuvaavat laskentamallin dimensioiden minimi- ja maksimiarvoja, kun taas  $r_e$  on suhteellinen elementtikokokerroin, joka määräytyy valitun elementtiverkon tiheyden mukaan seuraavasti:

- hyvin harva -  $r_e = 2,0$
- harva -  $r_e = 1,5$
- keskikokoinen -  $r_e = 1,0$
- tiheä -  $r_e = 0,7$
- hyvin tiheä -  $r_e = 0,5$ .

Lopullinen kokonaiselementtimäärä riippuu mallin geometriasta ja paikallisista verkon tihennyksistä ja harvennuksista. Paikallisia verkon tihennyksiä asetetaan tyypillisesti alueille missä suuret jännityskeskittymät tai muodonmuutostilat ovat odotettuja. Tällaisia alueita ovat muun muassa mahdolliset kulmat ja reunat sekä erilaiset rakenteet. Elementtiverkon tiheyden muuttaminen alueellisesti tapahtuu paikallisen karkeuskertoimen avulla, joka muuttaa määritetyn alueen elementtikokoa halutussa suhteessa mallin keskimääräiseen elementtikokoon. Kertoimen arvon ollessa suurempi kuin 1, verkko siis harvenee, ja päinvastoin. Mallin elementtiverkotus värähtelevän perustuksen ympäriltä tihennetyllä elementtijaolla on nähtävissä kuvassa 30.



**Kuva 30.** Laskentamallin elementtiverkotus.

Dynaamisessa laskennassa elementtiverkolla on suuri merkitys ja käyttäjän onkin kiinnitettävä erityistä huomiota elementtien kokoon vähentääkseen aaltojen numeerista leviämistä. Suuret elementit eivät kykene välittämään korkeita taajuuksia. Mikäli heräte sisältää korkeita taajuuksia, ne on joko suodatettava pois tai elementtiverkossa on käytettävä pienempää elementtikokoa. Elementtiverkon elementtien koko voidaan esittää yhtälön (6.5) mukaisesti

$$\Delta l = \frac{\lambda}{k} = \frac{V_s}{kf}, \quad (6.5)$$

missä  $\lambda$  on herätteen aallonpituus ja  $k$  on vakio, joka kuvaa elementtiverkon kokoa (Bouzon 2013, s. 66). Kuhlemeyer ja Lysmer (Kuhlemeyer & Lysmer 1973) esittävät  $k$ :lle raja-arvoksi 8 laskentatarkkuuden varmistamiseksi, vaikka korostavatkin elementtikoon vaikutuksen tutkimista tapauskohtaisesti. Tässä työssä  $k$ :n arvoa ei tarkemmin tutkita, sillä ohjearvo viittaa lineaarielementteihin, kun Plaxiksessa käytetään tarkempia 10-solmuisia tetraedrielementtejä, jolloin pienempi  $k$ :n arvo oletettavasti riittää tarvittavaan tulostarkkuuteen.

Plaxiksessa maan ja rakenteen välistä vuorovaikutusta voidaan tarvittaessa mallintaa todennukaisemmin erityisten 12-solmista koostuvien rajapintaelementtien avulla. Niiden avulla maan ja rakenteen välisen vuorovaikutuksen karheutta voidaan säätää haluttuun suuntaan erityisen lujuusvähennyskertoimen  $R_{inter}$  avulla sekä vaikuttaa rajapinnan kykyyn läpäistä vettä.

Rajapintaelementin ominaisuudet liittyvät ympäröivän maan maamalliin. Käytettäessä lineaarielastista maamallia, rajapintalujuus määräytyy juuri lujuusvähennyskertoimen mukaan. Rajapintaelementti on oletusarvoisesti jäykkä, jolloin  $R_{inter} = 1.0$ . Tällöin rajapinnan lujuutta ei ole pienennetty suhteessa ympäröivään maahan. Usein kuitenkin rajapinta on heikompi ja joustavampi kuin ympäröivä maa, jolloin lujuusvähennyskertoimen arvo voidaan asettaa manuaalisesti. Rajapinnan lujuus määräytyy ympäröivän maan ominaisuuksien mukaan seuraavien yhtälöiden mukaisesti:

$$c_i = R_{inter} c_{soil} \quad (6.6)$$

$$\tan \varphi_i = R_{inter} \tan \varphi_{soil} \leq \tan \varphi_{soil}. \quad (6.7)$$

Yhtälön (6.6)  $c_i$  on rajapinnan redusoitu koheesio ja  $c_{soil}$  ympäröivän maan koheesio. Yhtälön (6.7)  $\varphi_i$  on rajapinnan redusoitu kitkakulma ja  $\varphi_{soil}$  ympäröivän maan kitkakulma.

Kirjallisuudessa on esitetty  $R_{inter}$ -kertoimen arvoja erilaisille maalajeille ja rakenteille. Jos tarkempaa tietoa ei ole saatavilla, voidaan olettaa, että  $R_{inter} = 2/3$ . Lujuuden lisäksi lujuusvähennyskerroin vaikuttaa myös rajapinnan jäykkyyteen. Halutessa voidaan rajapinnalle asettaa myös jäännöslujuuskerroin  $R_{inter,residual}$ , johon rajapinnan lujuus lasketaan, kun lujuusvähennyskertoimen määräämä rajapinnan lujuuden raja-arvo on saavutettu.

Vertailututkimuksessa upotettua perustusta ympäröivät maat tiivistettiin kerroksittain ja maan ja perustuksen välisen kontaktin annettiin parantua 12 kuukauden ajan. Tässä työssä ensimmäisissä simuloinneissa ei käytetä rajapintaelementtejä, sillä perustuksen ja maan

välinen sidos oletetaan olevan kehittynyt täydelliseksi, jolloin perustuksen ja maan välillä ei tapahdu erkanemista.

Reunaehtojen asettaminen on yksi dynaamisen laskennan avaintekijöistä. Mallissa on vältettävä tuloksia vääristävä aaltojen heijastuminen mallin reunoista, sillä tällaista heijastumista ei tapahdu todellisuudessa. Mallissa tason molempien suuntien maksimirajoiksi sekä pystysuunnan minimirajaksi asetetaan viskoosit rajat. Nämä korreloivat tilannetta, jossa viskoosit vaimentimet vaikuttavat x- ja y-suunnassa rajoja pitkin synnyttäen vastaavoiman normaalin ja tangentin suunnassa, joka on verrannollinen rajojen viereisen materiaalin nopeuteen. Vaimentimet varmistavat, että jännityksen kasvu mallin reunalla absorboituu kimpoamisen sijaan. Tällöin raja alkaa liikkua. X-suunnassa absorboituva normaalijännityskomponentti (6.8) ja leikkausjännityskomponentti (6.9) ovat

$$\sigma_n = -C_1 \rho V_p \dot{u}_x \quad (6.8)$$

$$\tau = -C_2 \rho V_s \dot{u}_y, \quad (6.9)$$

missä  $\rho$  on materiaaliitiheys,  $\dot{u}_x$  on normaalipartikkelin nopeus,  $\dot{u}_y$  on leikkauspartikkelin nopeus ja  $C_1$  ja  $C_2$  relaksaatiokertoimet. Relaksaatiokertoimien avulla voidaan muokata absorptiota. Puristusaaltojen osuessa kohtisuoraan mallin reunoihin, relaksaatio on tarpeeton. Leikkausaaltojen kohdalla viskoosien rajojen vaimennus on puolestaan täydellinen. Oletusarvoina Plaxiksessa käytetään kertoimia  $C_1 = 1$  ja  $C_2 = 1$ , jolloin absorptio on kaikentyypisillä aalloilla riittävä käytännön sovellusten osalta. (Plaxis 3D - Scientific Manual, 2018, s. 52–53.)

Vaikka tällaisia erityisiä imukykyisiä rajoja käytetään, heijastuksilla on kuitenkin pieni vaikutus. Tästä johtuen laskentamallin rajat tulisi asettaa suhteellisen kauaksi värähtelylähteestä. Dynaamisessa analyysissä rajat asetetaan tavallisesti kauemmaksi kuin staattisen analyysin tapauksessa. (Plaxis 3D - Tutorial Manual, 2018, s. 110.)

Itse dynaaminen laskentavaihe sisältää 4 eri vaihetta. Alkuvaihe koostuu alkutilan jännitysten luomisesta. Tällöin laskentamallissa ei ole lainkaan perustusta eikä värähtelylähdettä. Toinen vaihe on plastisen laskennan vaihe, jossa staattinen kuorma eli perustuksen omapaino aktivoidaan. Kolmas vaihe on dynaamisen laskennan vaihe, jossa tutkitaan värähtelijän vaikutuksia. Neljännessä eli viimeisessä vaiheessa herätelähde kytketään pois ja maan annetaan värähdellä vapaasti.

Ennen varsinaista laskentaa on syytä valita mallista esilaskentapistet, joista halutaan tuottaa tarkat siirtymäkuvaajat. Laskennan aikana kaikkien laskentavaiheiden informaatio näistä pisteistä tallentuu erilliseen tiedostoon. Myös laskennan jälkeen on mahdollista valita pisteitä, joista tietoa haluaa, mutta näiden informaatio ei ole yhtä yksityiskohtaista kuin esilaskentapisteiden tapauksessa. Dynaamisessa analyysissä kätevin tapa tulosten esittämiseen on valittujen pisteiden siirtymävasteiden näyttäminen ajan funktiona. Myös nopeuksien ja kiihtyvyyksien esittäminen samaan tapaan onnistuu.

Kuten todettua, Plaxiksen dynaaminen laskenta perustuu Newmarkin menetelmän mukaiseen aikaintegraatioon. Siinä keskeisessä osassa oleva aika-askel voidaan ilmaista muodossa

$$\delta t = \frac{\Delta t}{mn}, \quad (6.10)$$

missä  $\Delta t$  on kuormituksen kesto,  $m$  tallennettavien laskenta-askelten eli laskentapisteiden määrä ja  $n$  ala-askelten määrä. Yhtälön (6.10) nimittäjä ilmaisee diskretisoinnissa käytettävien askelten kokonaismäärän. Keskeistä on määrittää asianmukainen askelten määrä, että dynaaminen vaste on riittävän tarkka.

Työssä kuormituksen kesto on asetettu riittävän pitkäksi, että transientin vasteen vaikutus on minimoitu. Laskennassa käytetty askelten eli laskentapisteiden määrä riippuu kuormituksen kestosta, sillä mitä pidempi kuormituksen kesto sitä enemmän laskentapisteitä tarvitaan. Kaikissa tapauksissa laskentapisteiden määrä oli sellainen, että dynaamisten impedanssien laskennassa vasteen amplitudin ero herätteen amplitudiin saatiin määritettyä riittävän tarkasti. Ala-askelten määrittäminen tapahtuu automaattisesti, jolloin ohjelma laskee sopivan ala-askelten määrän perustuen materiaaliominaisuuksiin, elementtiverkon kokoon ja laskennassa käytettäviin aikahistoriafunktioihin. Ala-askelten automaattisesti laskettu määrä saattaa muuttua voimakkaasti hyvinkin pienistä muutoksista mallissa, jolloin aina automaattiasetuksia ei ole välttämättä tarkoituksenmukaista käyttää.

Aika-askel on vakio ja yhtä suuri kuin kriittinen aika-askel (6.11) koko laskennan ajan. Näin varmistetaan, että yhden askeleen aikana aalto ei etene enempää kuin elementin minimimitan. Jos laskennassa käytetty aika-askel on liian suuri, ratkaisussa on merkittäviä poikkeamia, jolloin vaste on epäluotettava. Kriittinen aika-askel määritetään kaavalla

$$\Delta t_{critical} = \frac{l_{min}}{v_s}, \quad (6.11)$$

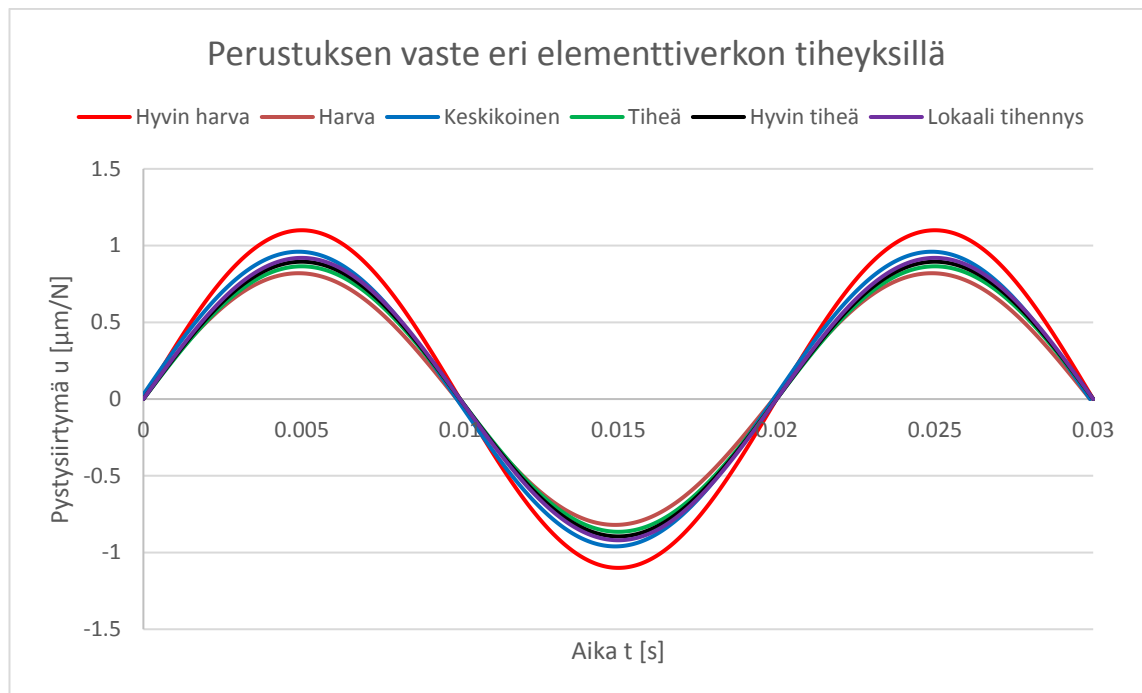
jossa  $l_{min}$  on elementin kahden pisteen minimiväli ja  $V_s$  leikkausaallon nopeus elementissä. (Plaxis 3D - Scientific Manual, 2018, s. 51.)

Plaxiksessa lineaariyhtälöistä koostuvien systeemien kokoaminen ja ratkaiseminen suoritetaan ratkaisijoiden avulla. Tässä yhteydessä käytetään Picos-ratkaisijaa, joka ratkaisee yhtälösystemin iteratiivisesti kyeten hyödyntämään moniydinprosessoreita. Se on yleisesti nopein saatavilla oleva ratkaisija laskennan suorittamiseen. Ne laskenta-asetukset, joita ei tässä ole erikseen mainittu, pidetään oletusasetuksina.

Plaxiksen käyttäjän valinnasta riippuvat laskentamallin geometrian sivumitat, korkeus ja elementtiverkon tiheys vaikuttavat suuresti tulosten tarkkuuteen ja laskenta-aikaan. Mitä pienempi laskentamalli on, sitä herkemmin laskentatulokseen vaikuttavia aaltojen heijastuksia tapahtuu mallin ulkopinnoilta. Laskentamallin koon kasvaessa heijastusten vaiku-

tus pienenee, mutta laskenta-aika kasvaa. Vastaavasti elementtiverkon tiheyden tapauksessa tiheämpi verkko takaa tarkemmat laskentatulokset, mutta pidemmän laskenta-ajan. Mallin optimoinnin avulla pyritään valitsemaan nämä tekijät siten, että päästään riittävän tarkkoihin tuloksiin hyväksyttävällä laskenta-ajalla. Tällöin maan voidaan otaksua kuvaavan riittävän tarkasti puoliääretöntä väliainetta.

Optimointi suoritetaan tässä kokonaan upotetulle perustukselle ja optimoitua mallia hyödynnetään myös muilla upotussyvyyksillä. Aluksi määritetään elementtiverkon tiheys, jonka jälkeen optimoidaan mallin sivumitat. Laskentamallin korkeus on vakio 8 metriä. Käytetyt maaparametrit on esitetty edellisessä kappaleessa. Oheisesta kuvasta nähdään eri verkkokokojen vasteet.



**Kuva 31.** Elementtiverkon tiheyden vaikutus perustuksen vasteeseen.

Käytettävä elementtiverkon tiheys on määritetty ensin kohdistamalla kokonaan upotettuun perustukseen pystysuuntainen herätetaajuus eri elementtiverkon tiheyksillä. Yhtälön 6.5 mukaan mitä suurempi herätetaajuus on, sitä pienempi aallonpituus, mikä tarkoittaa tiukempaa elementtiverkon tiheysvaatimusta. Eli elementtikoon pysyessä muuttumattomana ja taajuuden pienentyessä tarkkuus kasvaa. Siksi on perusteltua valita suhteellisen suuri herätetaajuus, jolloin sitä pienempien taajuuksien antamat tulokset ovat vähintään yhtä tarkkoja. Tässä herätetaajuudeksi on valittu 50 hertsiä, sillä tällöin vaste tasoittuu suhteellisen nopeasti ja tuloksia on helppo vertailla keskenään. Lisäksi tutkitaan perustuksen ympäriltä tihennetyin verkon vaikutusta amplitudiin. Laskentamallin kooksi on valittu 40 x 40 metriä reunaheijastusten minimoimiseksi.

Kuvassa 31 esitetyistä vasteista nähdään, että valittu verkkokokoko vaikuttaa amplitudin suuruuteen merkittävästi, jolloin verkon asianmukainen tiheys on valittava huolellisesti.



Hyvin harva ja harva verkotus antavat vasteen amplitudihuipussa ääriarvot: Hyvin harva verkko antaa amplitudille suurimman arvon ja harva verkko pienimmän arvon. Keskikokoisen verkon antama maksimiarvo vajoaa näiden väliin. Tiheällä verkolla ja tarkimmalla hyvin tiheällä verkolla päästään melko lähelle samoihin tuloksiin. Tulokset ovat odotetun mukaisia, sillä amplitudit lähenevät verkon tiheyden kasvaessa hyvin tiheen verkon amplitudia.

Perustuksen ympäriltä lokaalisti tihennetty verkko (karkeuskerroin 0,0625), jossa muuten on keskikokoinen verkkokoko, antaa hyvin lähelle saman amplitudin kuin hyvin tiheä verkko. Työssä päädytään käyttämään keskikokoista elementtiverkkokokoja lokaalilla tihennyksellä, sillä sen vaatima laskenta-aika on tiheää ja hyvin tiheää verkkoa huomattavasti lyhyempi. Vertailukohdaksi voidaan antaa, että käytössä olleella laskentateholla yhden taajuuden vasteen määrittäminen keskikokoisella elementtiverkolla lokaalin tihennyksen kera kesti noin tunnin, kun taas verkkokoon ollessa hyvin tiheä koko mallissa sama laskenta vei aikaa likimain kymmenkertaisesti.

Elementtiverkon koon valinnan jälkeen tutkitaan mallin sivumittojen vaikutusta perustuksen amplitudiin. Herätetaajuutena käytetään 20 hertsin taajuutta, sillä kyseisellä arvolla tulokset ovat suurempia taajuuksia tarkempia.

**Taulukko 4.** Mallin sivumittojen vaikutus perustuksen amplitudiin.

Laskentamallin sivumitat [mxm]	Pystysiirtymän amplitudi [ $\mu\text{m}/\text{N}$ ]	Elementtimäärä [kpl]	Ero suurimpaan laskentamalliin [%]
2x2	1.15	7241	-41.1
4x4	0.76	7721	6.7
10x10	0.795	24318	2.5
15x15	0.93	40919	-14.1
20x20	0.805	70153	1.2
25x25	0.85	93901	-4.3
30x30	0.835	141303	-2.5
40x40	0.825	171496	-1.2
50x50	0.815	205628.0	0.0

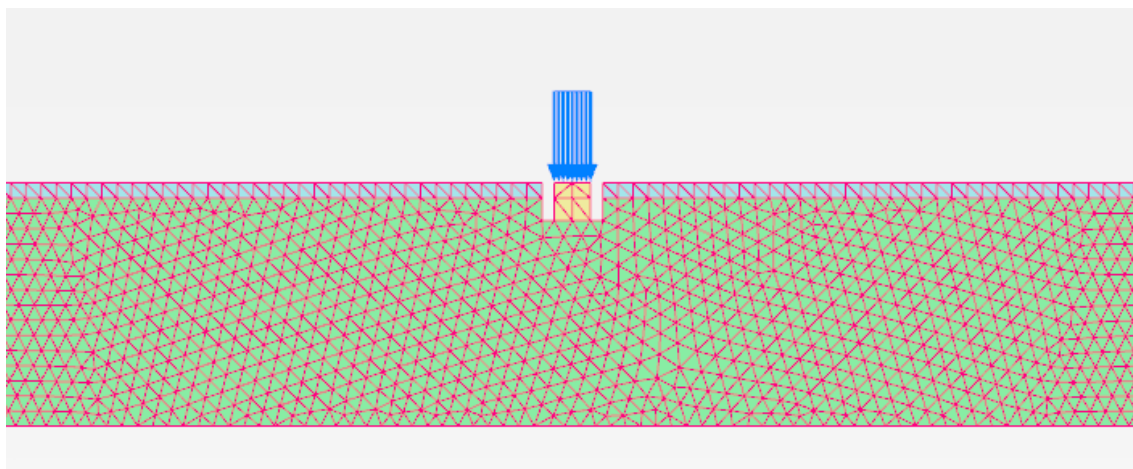
Taulukossa 4 on esitetty pystysiirtymän amplitudi eri laskentamallin sivumitoilla laskettuna. Lisäksi taulukossa on esitetty kunkin mallin elementtimäärä sekä amplitudin ero sivumitoiltaan leveimmän mallin amplitudiin. Eri malleissa keskimääräinen elementtikoko pidettiin likimain samankokoisena, joka on nähtävissä kasvavasta elementtimäärästä siirryttäessä suurempaan malliin. Tällä tavoin pyrittiin minimoimaan elementtiverkon tiheyden vaikutusta ja saamaan selville juuri sivumittojen leveyden merkitys tuloksiin.

Taulukoiduista tuloksista nähdään, että pienillä laskentamallin sivumitoilla amplitudi poikkeaa suurempien sivumittojen laskentamallien tuloksista. 20 m x 20 m ja sitä suuremmilla malleilla tulokset näyttävät osuvan melko lähelle toisiaan poiketen leveimmän mallin tuloksista alle 5 %. Sivumitoilla 15 m x 15 m ja sitä pienemmillä malleilla amplitudia sekä yliarvioidaan että aliarvioidaan verrattuna suurempien mallien tuloksiin. Kaikkein pienimmässä mallissa amplitudin suuruus on huomattavasti muita tuloksia suurempi, mikä oletettavasti johtuu aaltojen heijastumisesta mallin reunoista.

Näiden tulosten perusteella 20 m x 20 m mittoja pienempää mallia ei pidä valita analyysiin. Lopullisessa laskennassa käytetyksi mallin kooksi valitaan 40 m x 40 m. Edellä saatujen tulosten pohjalta tämän pitäisi olla riittävän tarkka kuvaamaan maata puoliäärettömänä väliaineena.

### 6.3 Plaxis 2D

Plaxiksen kolmiulotteinen malli on numeerisen laskennan pääosassa, mutta sivutyönä työssä tutkitaan myös kahdella perustustapauksella kolmiulotteisen ja kaksiulotteisen mallin tulosten eroja. Osa Plaxis 2D:n pintaperustuksen laskentamallista elementtiverkkoineen on esitetty kuvassa 32.



**Kuva 32.** Plaxis 2D:n laskentamalli

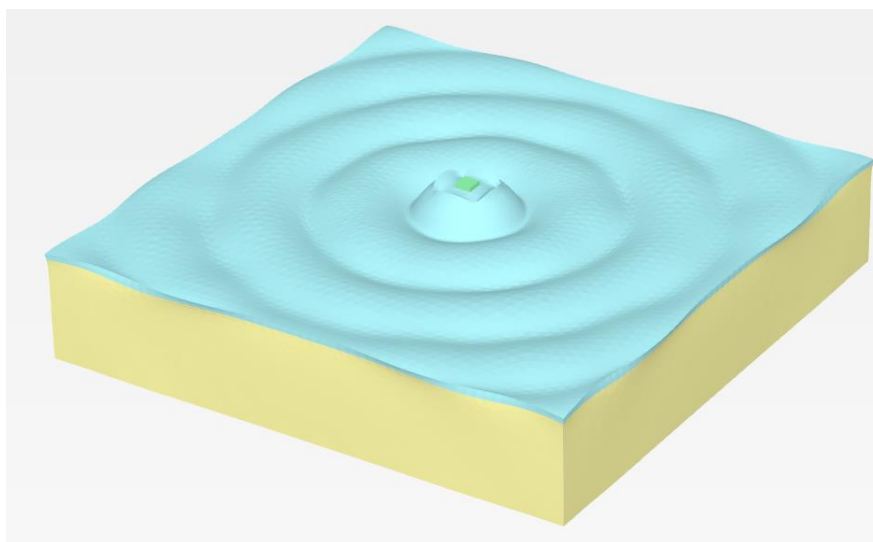
Lähtökohtaisesti ohjelmat ovat muuten toisiaan vastaavat, mutta nimensä mukaisesti Plaxis 2D:ssä mallinnus tapahtuu kaksiulotteisesti, jolloin tilavuuselementtien sijaan mallissa käytetään pintaelementtejä. Kaksiulotteisen mallin tapauksessa dynaamisen simuloinnin laskenta-aika on huomattavasti kolmiulotteista mallia lyhyempi. Mallissa käytettiin tiheää elementtiverkkokokoa lokaalilla tihennyksellä, sillä laskenta-aika pysyy joka tapauksessa varsin lyhyenä. Mallin kooksi pituussuunnassa valittiin 100 metriä aaltojen reunahaijastusten minimoimiseksi. Käytetyt maaparametrit ja laskenta-asetukset ovat samat kuin kolmiulotteisella mallilla.

## 7. TULOKSET JA NIIDEN TULKINTA

Tässä kappaleessa on esitetty perustuksen pystysuuntaisen siirtymän amplitudit eri taajuuksilla upotussyvyyksillä 0 mm, 310 mm, 620 mm, 930 mm ja 1240 mm. Jokaisen upotussyvyyden amplitudit on määritetty sekä Plaxiksen numeerisen mallin että Gazetasin yhtälöiden avulla ja ne on esitetty vertailututkimuksen kokeellisten mittaustulosten rinnalla. Vastaavasti on esitetty dynaamisten impedanssien reaali- sekä imaginääriosia taajuuksittain. Tulosten perusteella joidenkin perustustapausten käyttäytymistä on pyritty todenmukaistamaan maan ja perustuksen välistä kontaktia redusoidmalla. Lisäksi kahdella perustustapauksella Plaxis 3D:n tuloksia on verrattu saman ohjelman kaksiulotteisen version antamiin tuloksiin.

Kuten aiemmin todettiin, Plaxiksen numeerisessa mallissa käytetty maamalli ei huomioi lainkaan materiaalivaimennusta. Myöskään Gazetasin yhtälöissä materiaalivaimennusta ei ole huomioitu. Gazetasin yhtälöihin pohjautuvassa laskentapohjassa on kuitenkin mahdollista huomioda materiaalivaimennus niin halutessaan materiaalivaimennuskertoimen avulla. Näin ollen edellä mainittujen menetelmien vaimennus koostuu täysin säteilyvaimennuksesta.

Kuvassa 33 on havainnollistettu perustuksen värähtelyn aiheuttamaa maan muodonmuutosta.



**Kuva 33.** *Laiteperustusta ympäröivän maan muodonmuutos.*

Värähtely leviää maa-alueen keskellä olevasta perustuksesta kaikkiin suuntiin, jolloin muodonmuutos on symmetrinen. Kuvassa esitetyt muodonmuutokset on skaalattu todellisuutta suuremmiksi.

Perustusten siirtymät on määritetty perustusten pohjien keskipisteessä. Plaxiksen ja Gazetasin yhtälöiden avulla määritetyt perustusten pohjien siirtymät ovat yhtä suuret kuin perustusten massakeskipisteiden sekä yläpintojen keskipisteiden siirtymät, sillä värähtely on pystysuuntaista ja perustukset on mallinnettu jäykkinä kappaleina. Epäkeskisyyden synnyttämää perustuksen rotaatiota ei tapahdu.

Vertailututkimuksessa tulokset on esitetty useimmilla upotussyvyyksillä taajuusvälillä 10 Hz – 100 Hz. Tässä työssä ei ole tarkoituksenmukaista esittää kaikkein ylimpiä taajuuksia, sillä nämä korkeataajuuksilaitteet ovat teollisuudessa vähemmistössä. Lisäksi suurempien käyntitaajuuksien simulointi Plaxiksen avulla vaatii enemmän aikaa, sillä laskentapisteitä on oltava enemmän, jotta vaste saadaan esitettyä riittävän tarkasti. Siksi tutkituksi taajuusväliksi on rajattu useimmilla upotussyvyyksillä 10 Hz – 70 Hz.

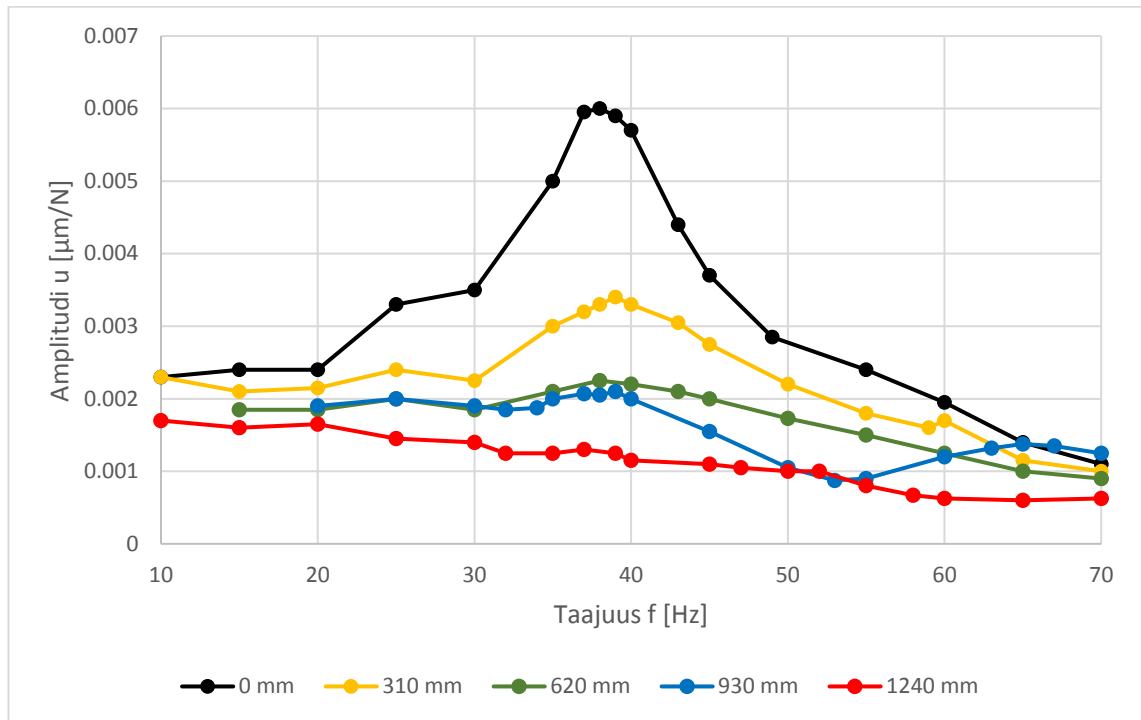
Liitteessä B on esitetty havainnollisuuden vuoksi Plaxiksella määritetyn täysin upotetun perustuksen siirtymävaste eri taajuuksilla. Simuloidut taajuudet ovat järjestyksessä 5 Hz, 10 Hz, 15 Hz, 20 Hz, 25 Hz, 30 Hz, 35 Hz, 40 Hz, 45 Hz, 50 Hz, 55 Hz, 60 Hz, 65 Hz ja 70 Hz. Jokaista taajuutta on simuloitu kahden sekunnin ajan. Liitteestä nähdäänkin, että osalla taajuuksista vastehuippu on heti simuloinnin alussa, joka johtuu ominaisvärähtelystä. Tätä ei huomioida siirtymäamplitudeja määritettäessä vaan amplitudit luetaan simuloidun aikavälin loppuosasta. Liitteestä havaitaan myös värähtelyn tihentyminen taajuuden kasvaessa.

## 7.1 Perustuksen amplitudit

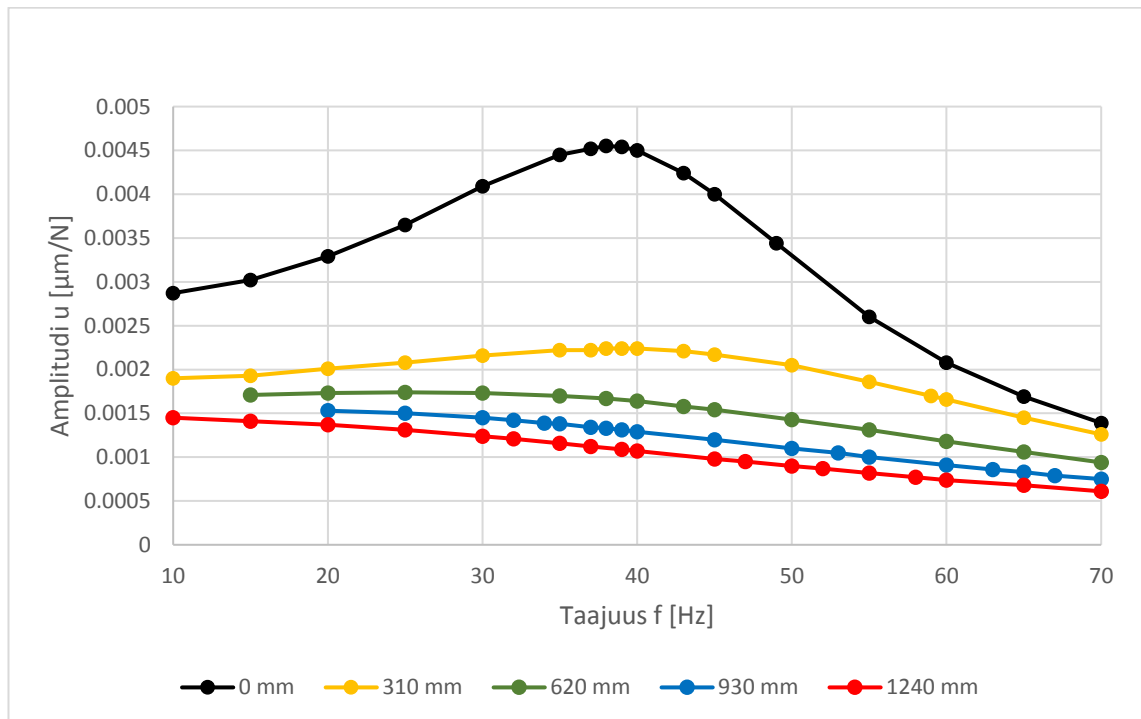
Tämän alaluvun taulukoissa siirtymäamplitudit eri taajuuksilla on esitetty mikrometreinä newtonia kohti. Toisin sanoen esitetyt amplitudit on saatu kohdistamalla perustukseen yhden newtonin suuruinen herätevoima. Suuremmilla herätevoimilla siirtymäamplitudit saadaan suoraan skaalattua saatujen tulosten pohjalta. On syytä huomata, että mikäli herätelähteen voiman amplitudi ei pysy vakiona kaikilla taajuuksilla, todellisia siirtymiä esittävään taajuusvastekuvaajaan voi syntyä useampia amplitudihuippuja.

Menetelmäkohtaisissa kuvissa 34, 35 ja 36 on esitetty vertailututkimuksen, Gazetasin yhtälöiden ja Plaxiksen avulla määritetyt amplitudit eri upotussyvyyksillä. Upotussyvyyskohtaisissa kuvissa 37 – 41 perustuksen amplitudit on esitetty upotussyvyyksien mukaan, jolloin eri menetelmien väliset amplitudierot eri upotussyvyyksillä ovat helposti nähtävissä.

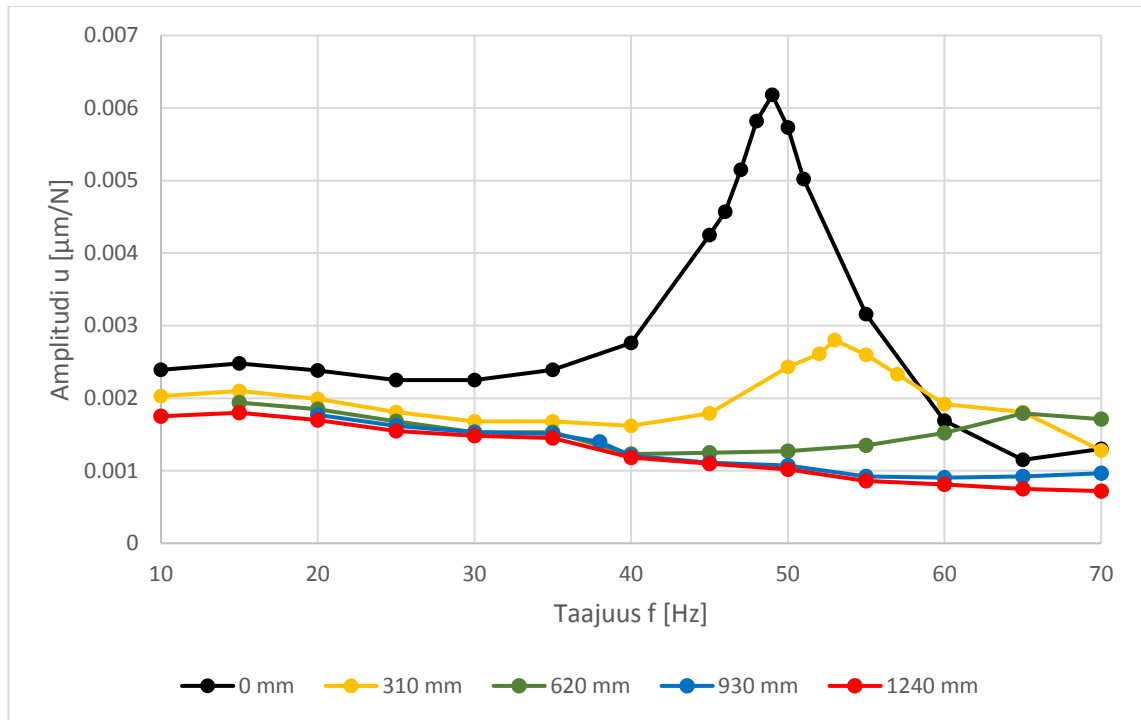
### 7.1.1 Menetelmäkohtaiset kuvaajat



**Kuva 34.** Vertailututkimus: Pystysuuntaisen yksikkövoiman aiheuttama amplitudi taajuuden funktiona eri upotussyvyyksillä.

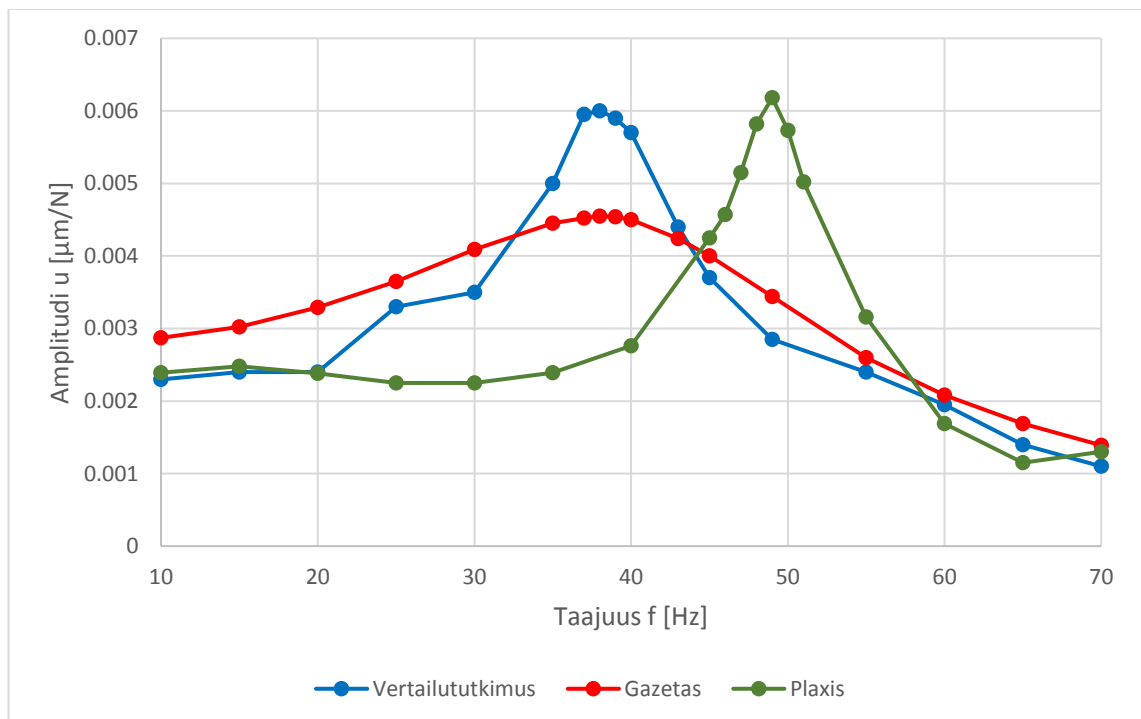


**Kuva 35.** Gazetasin yhtälöt: Pystysuuntaisen yksikkövoiman aiheuttama amplitudi taajuuden funktiona eri upotussyvyyksillä.

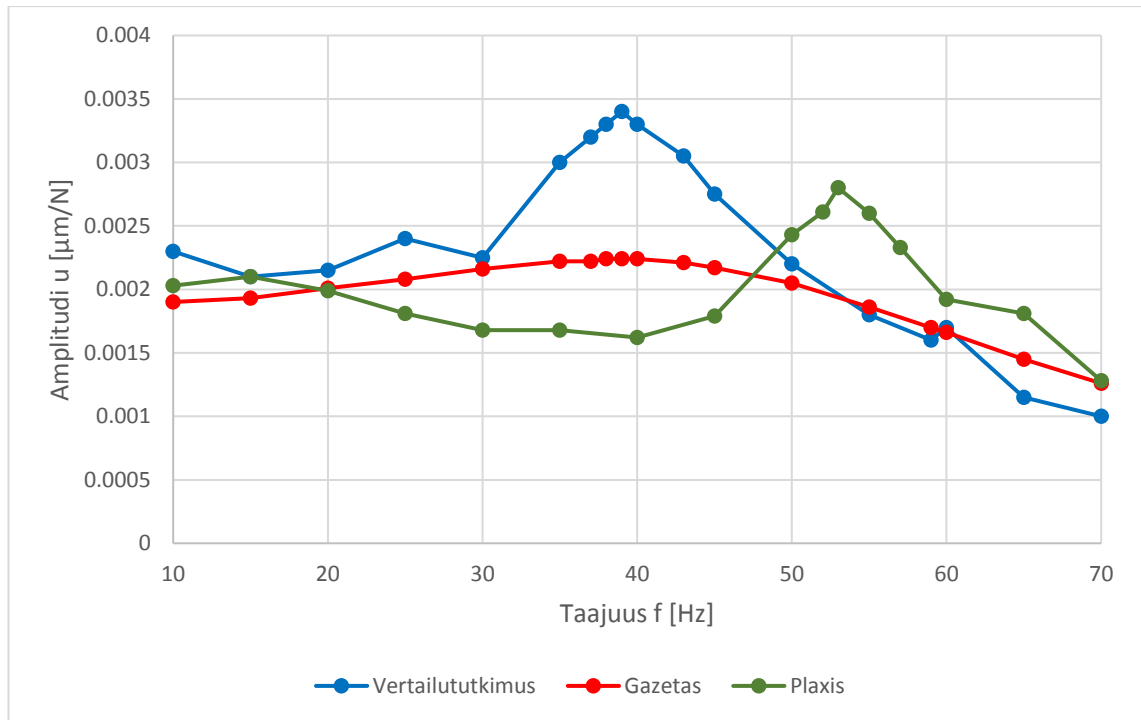


**Kuva 36.** *Plaxis: Pystysuuntaisen yksikkövoiman aiheuttama amplitudi taajuuden funktiona eri upotussyvyyksillä.*

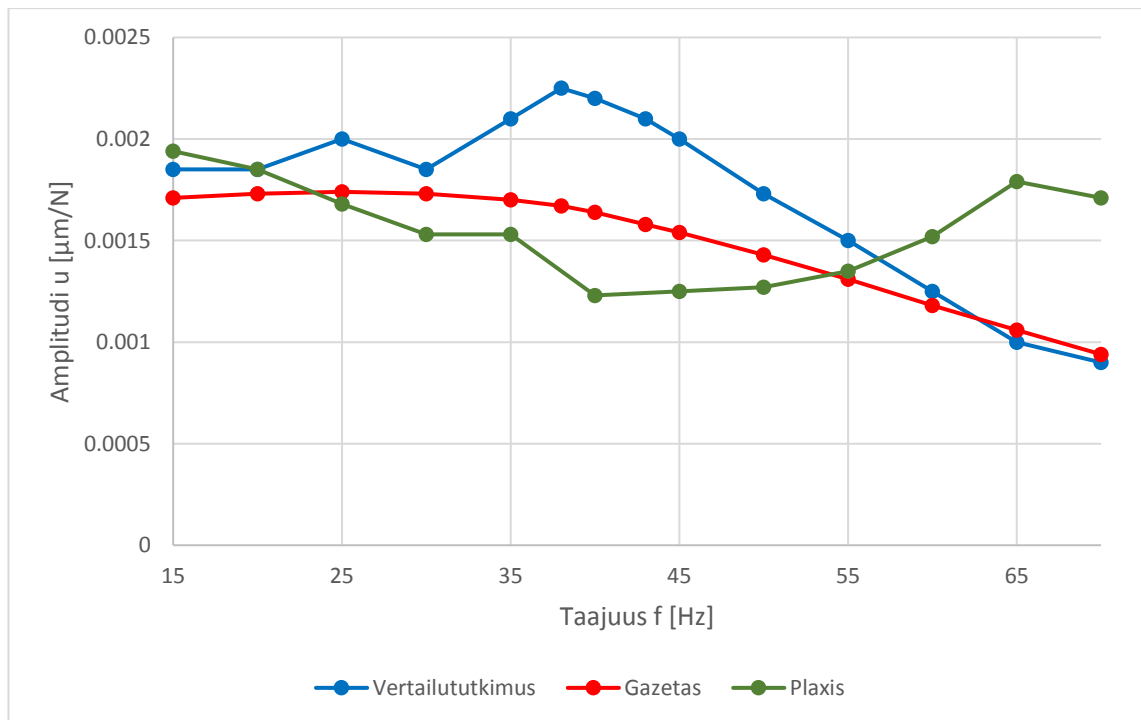
### 7.1.2 Upotussyvyyskohtaiset kuvaajat



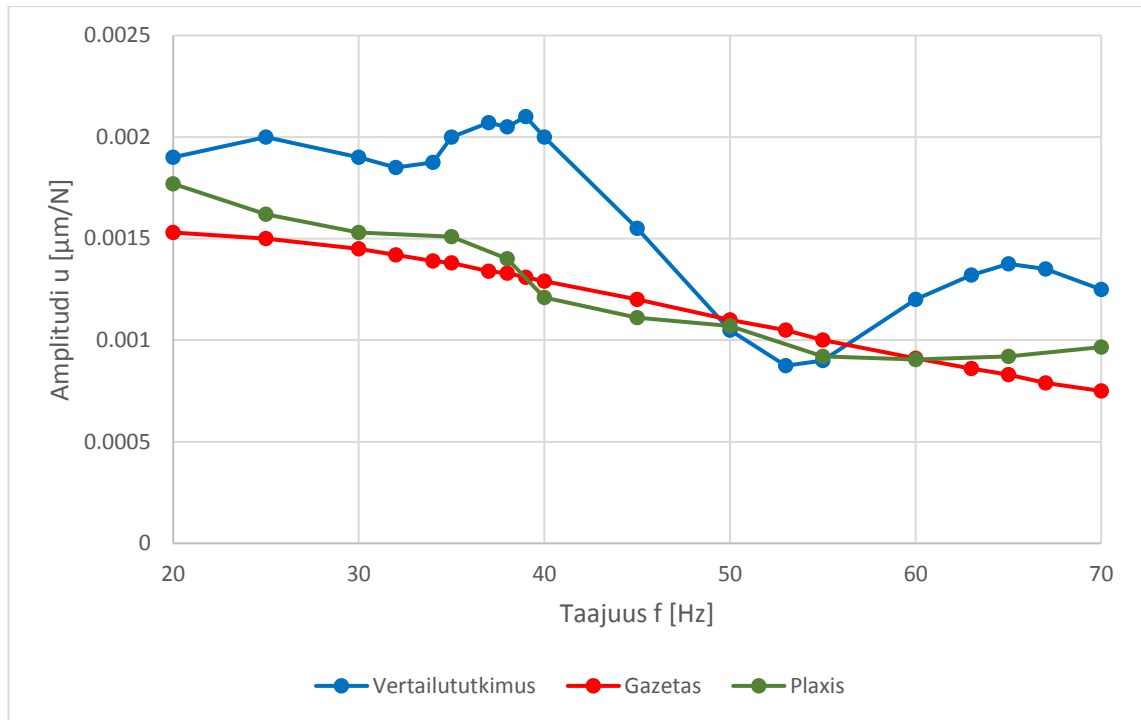
**Kuva 37.** *Pystysuuntaisen yksikkövoiman aiheuttama amplitudi taajuuden funktiona, upotussyvyys 0 mm.*



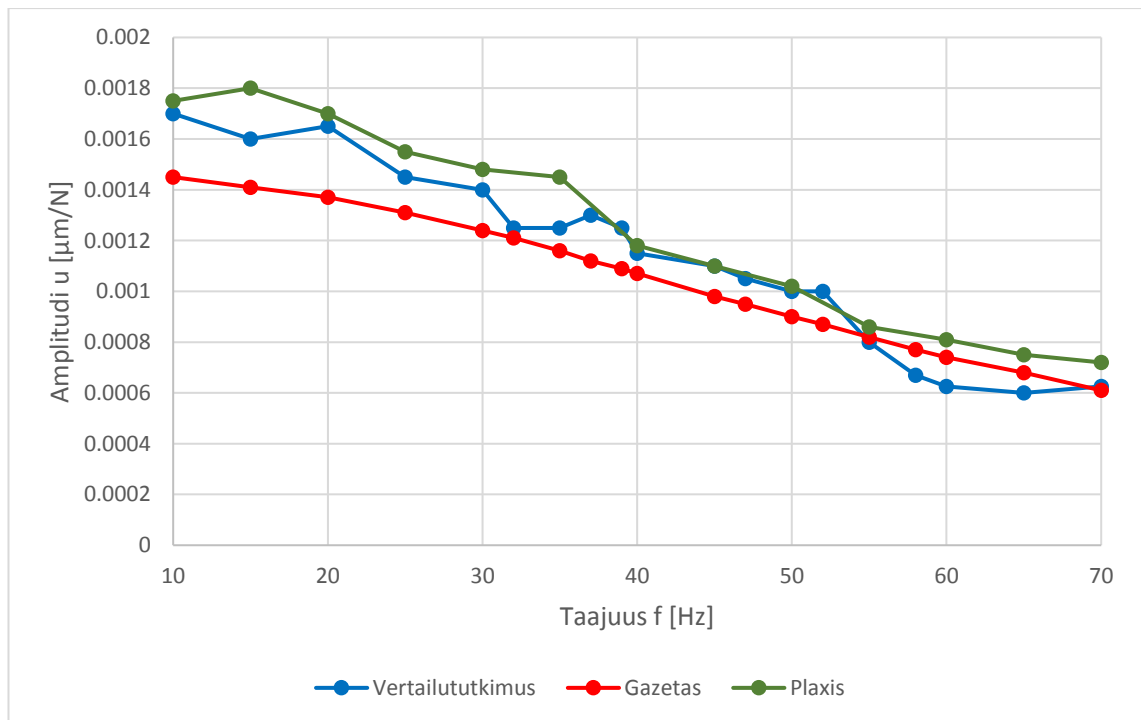
**Kuva 38.** Pystysuuntaisen yksikkövoiman aiheuttama amplitudi taajuuden funktiona, upotussyvyys 310 mm.



**Kuva 39.** Pystysuuntaisen yksikkövoiman aiheuttama amplitudi taajuuden, upotussyvyys 620 mm.



**Kuva 40.** Pystysuuntaisen yksikkövoiman aiheuttama amplitudi taajuuden funktiona, upotussyvyys 930 mm.



**Kuva 41.** Pystysuuntaisen yksikkövoiman aiheuttama amplitudi taajuuden funktiona, upotussyvyys 1240 mm.



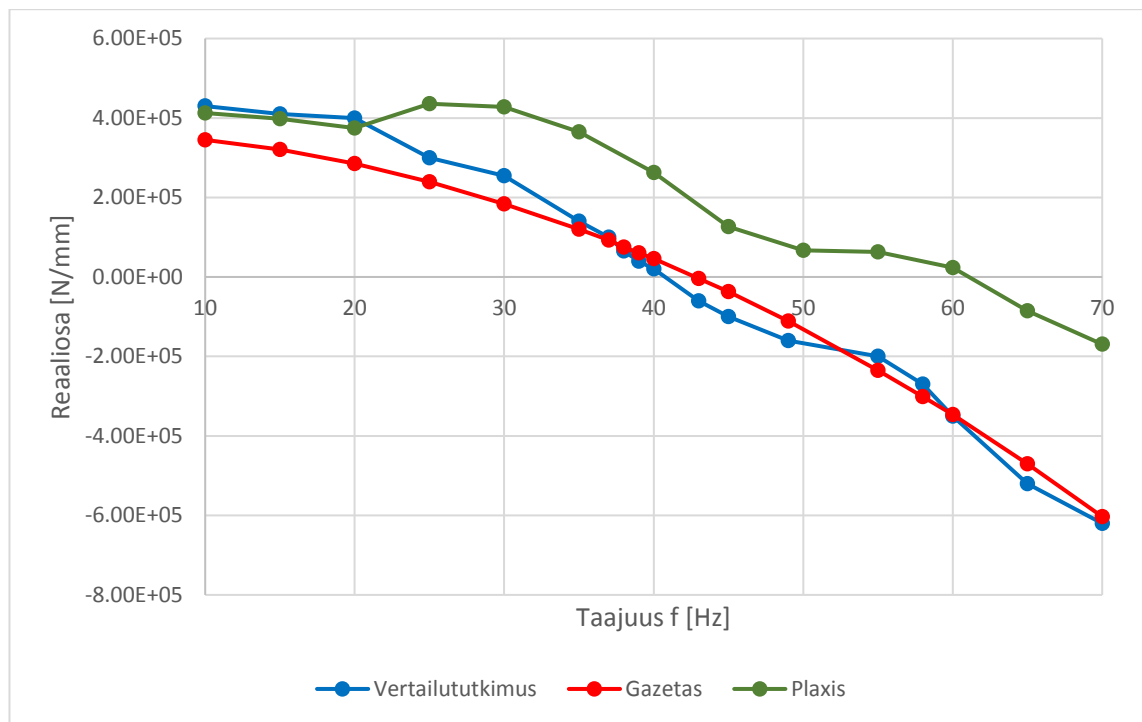
## 7.2 Perustuksen dynaamiset impedanssit

Dynaamisten impedanssien reaali- (kuvat 42 – 46) ja imaginääriosat (kuvat 47 – 51) on taulukoitu taajuuden funktiona eri upotussyvyyksillä. Plaxiksen impedanssien eri osat on laskettu kappaleessa 4.3.2 kuvatulla tavalla.

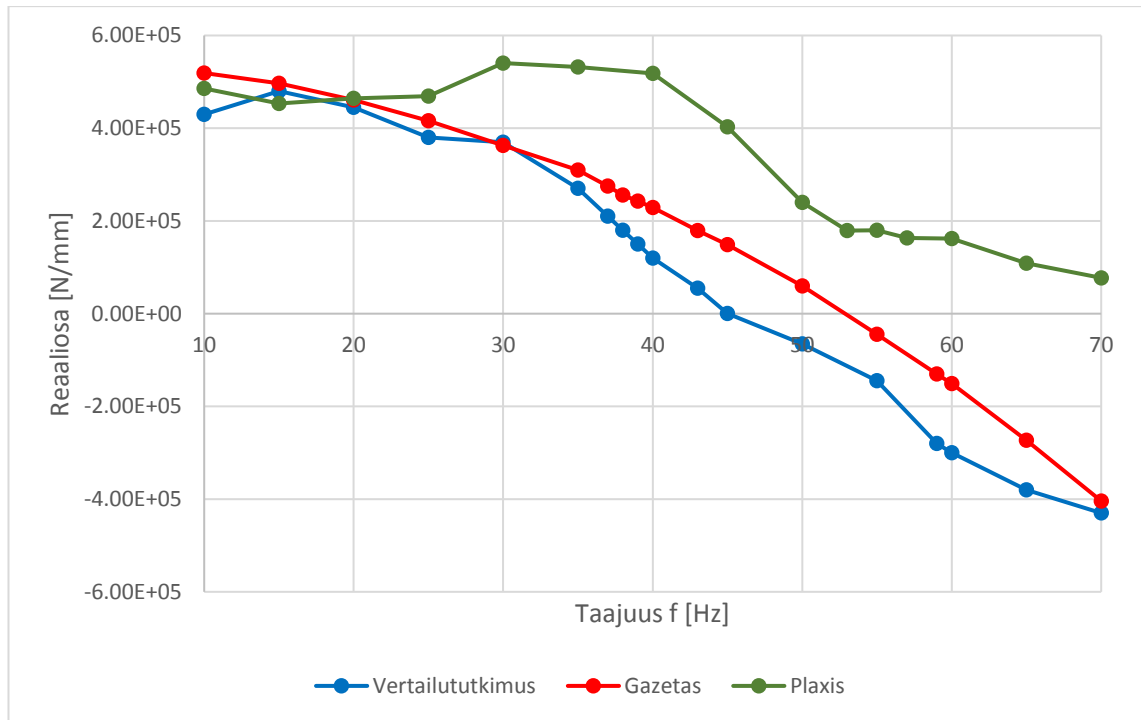
Impedanssin reaaliiosa kuvaa systeemin taajuusriippuvaisia jäykkyysominaisuuksia. Plaxiksen reaaliosat laskettiin simuloiduista vasteista herätteen ja vasteen välisen amplitudien aikaeron pohjalta. Taajuuden kasvaessa heräte ja vaste muuttuvat yhä tiheämmäksi harmoniseksi funktioksi ja reaaliosan arvo on hyvin herkkä amplitudieron pienellekin muutokselle. Suurimpien taajuuksien impedanssit määritettiin tihennetyllä laskentapistemäärällä, että tulosten tarkkuus saatiin varmistettua.

Impedanssin imaginääriosa kuvaa systeemin taajuusriippuvaisia vaimennusominaisuuksia. Niiden arvot laskettiin samoilla vaihekulman suuruuksilla kuin reaaliosankin.

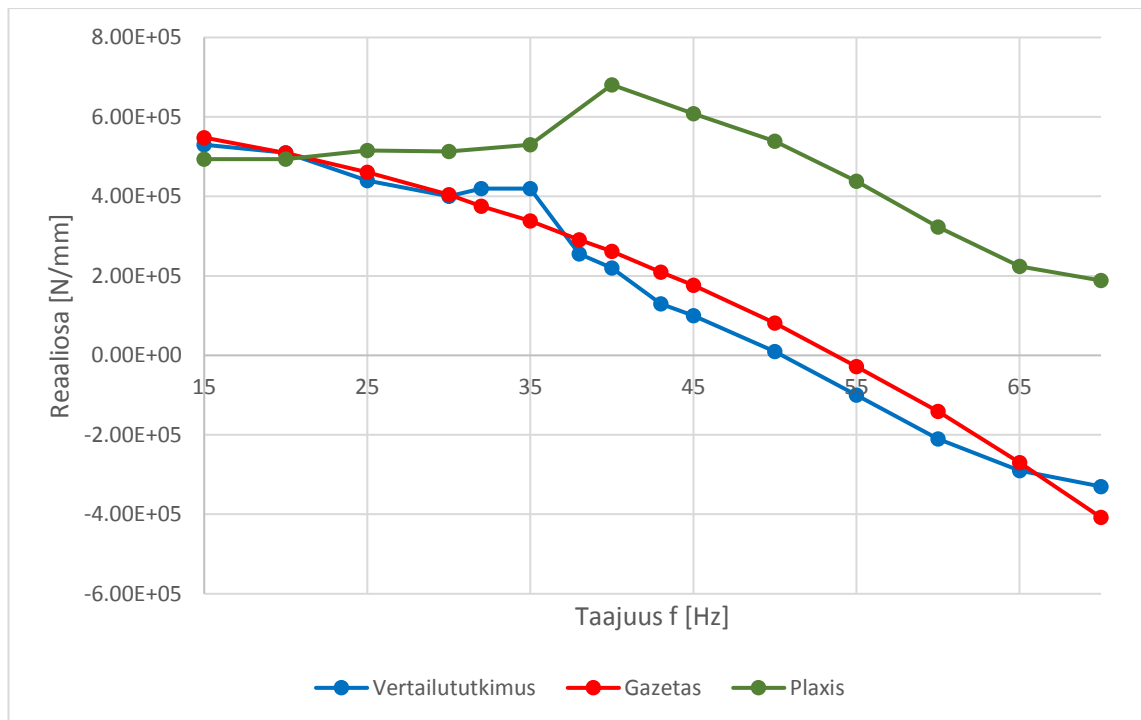
### 7.2.1 Reaaliosat



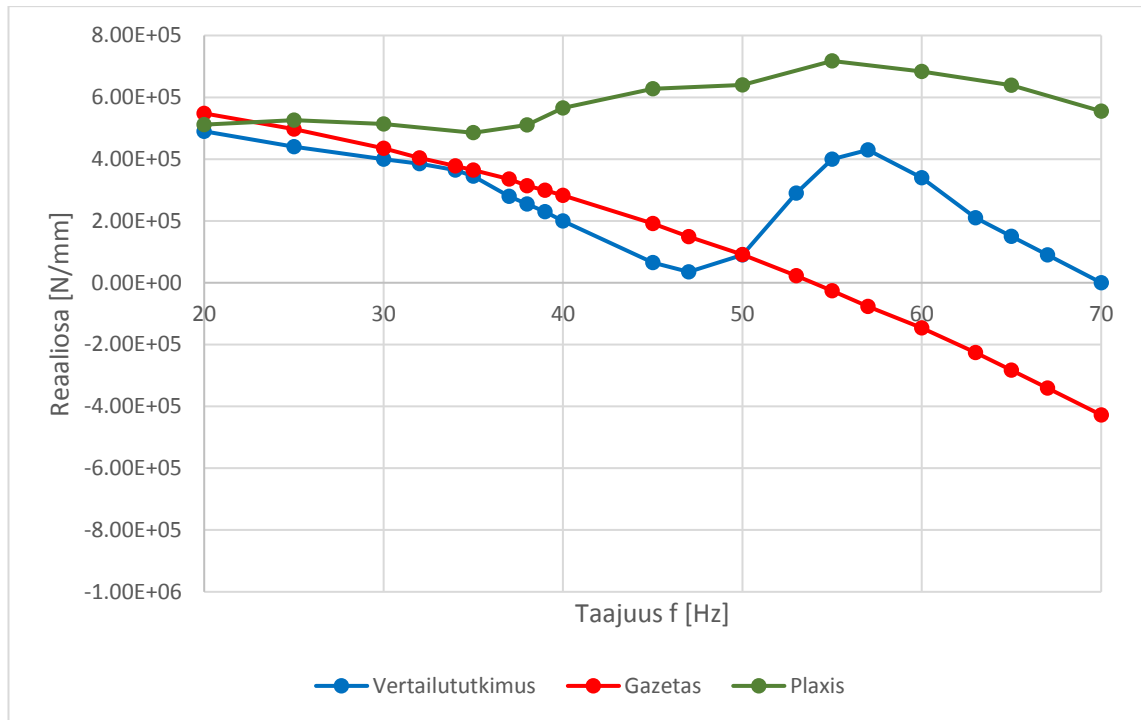
**Kuva 42.** Dynaamisen impedanssin reaaliiosa taajuuden funktiona, upotussyvyys 0 mm.



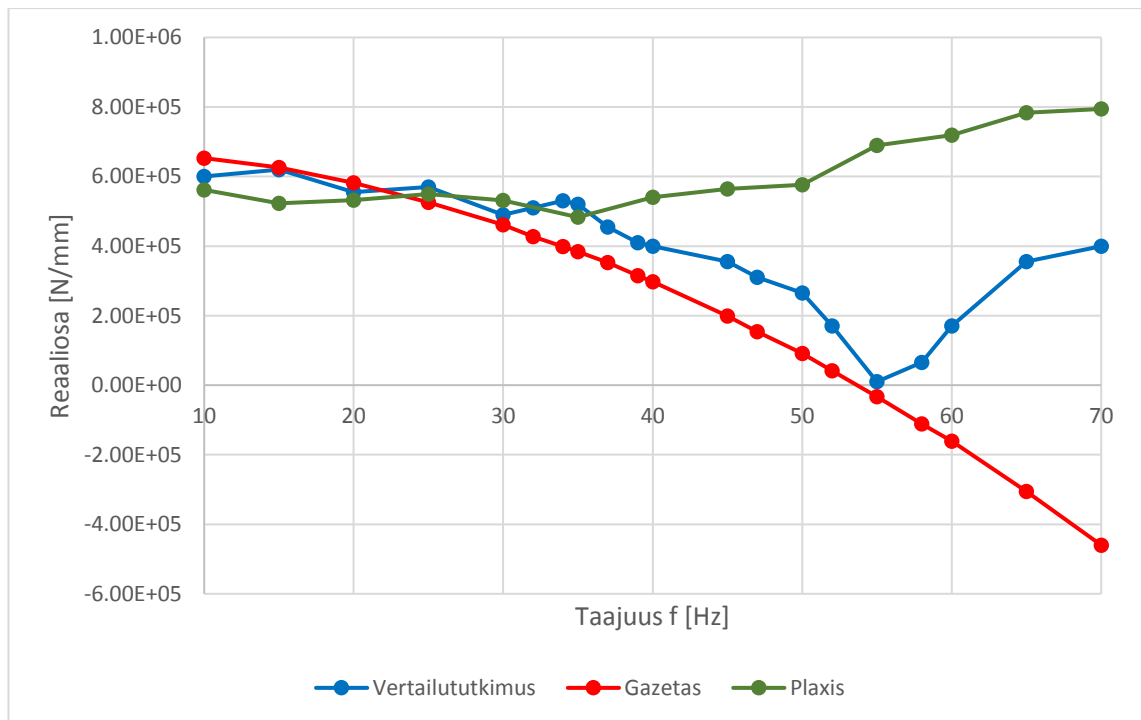
**Kuva 43.** Dynaamisen impedanssin reaaliosta taajuuden funktiona, upotussyvyys 310 mm.



**Kuva 44.** Dynaamisen impedanssin reaaliosta taajuuden funktiona, upotussyvyys 620 mm.

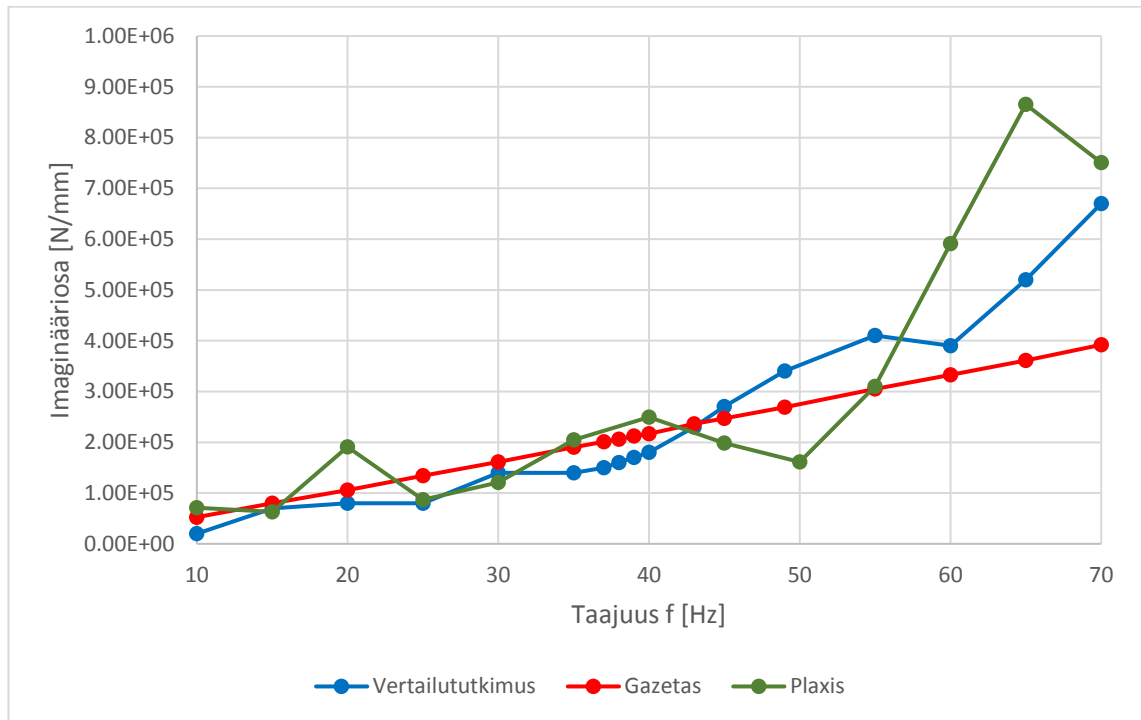


**Kuva 45.** Dynaamisen impedanssin reaaliosa taajuuden funktiona, upotussyvyys 930 mm.

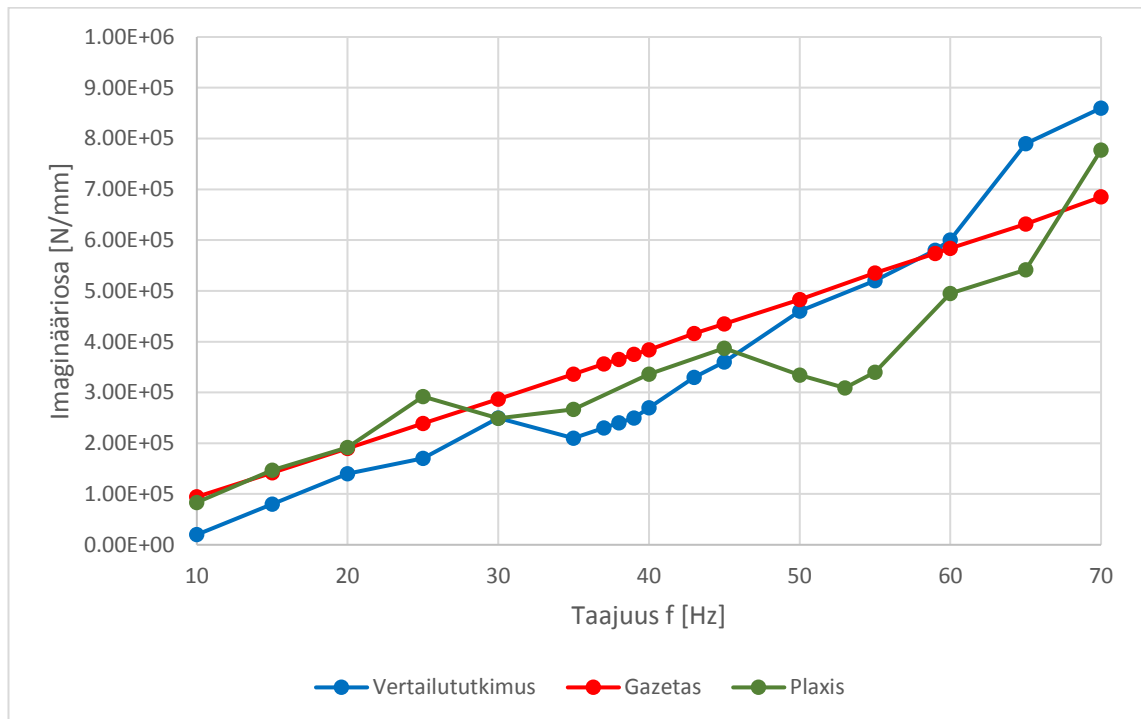


**Kuva 46.** Dynaamisen impedanssin reaaliosa taajuuden funktiona, upotussyvyys 1240 mm.

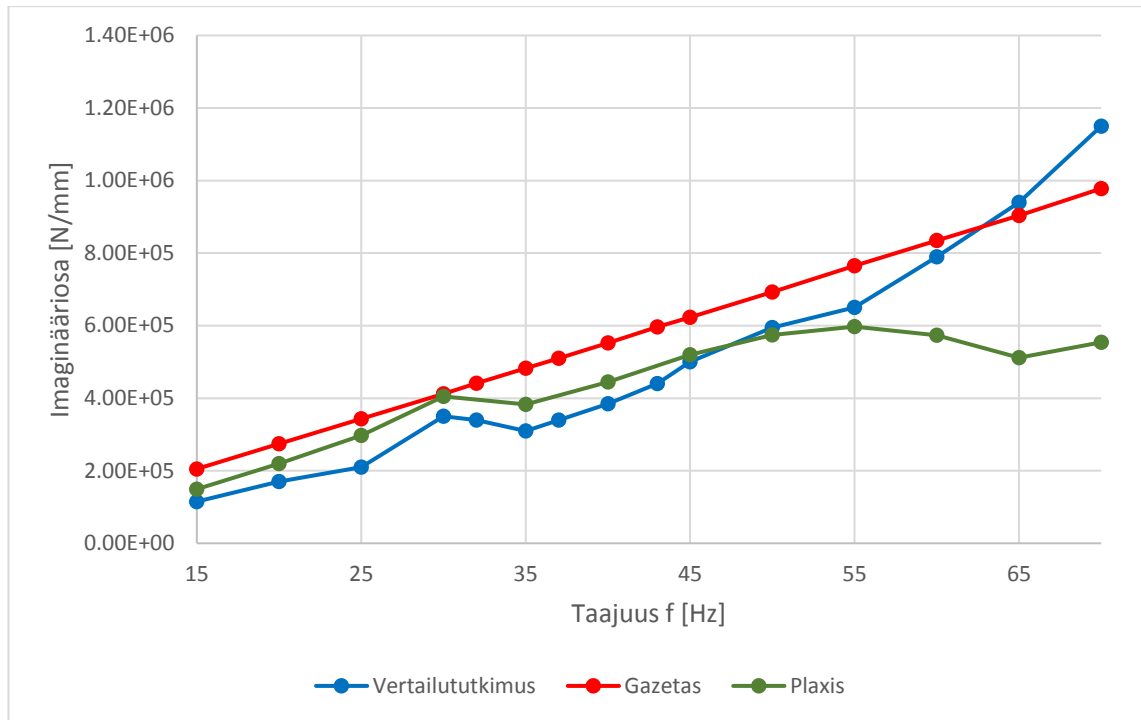
## 7.2.2 Imaginääriosat



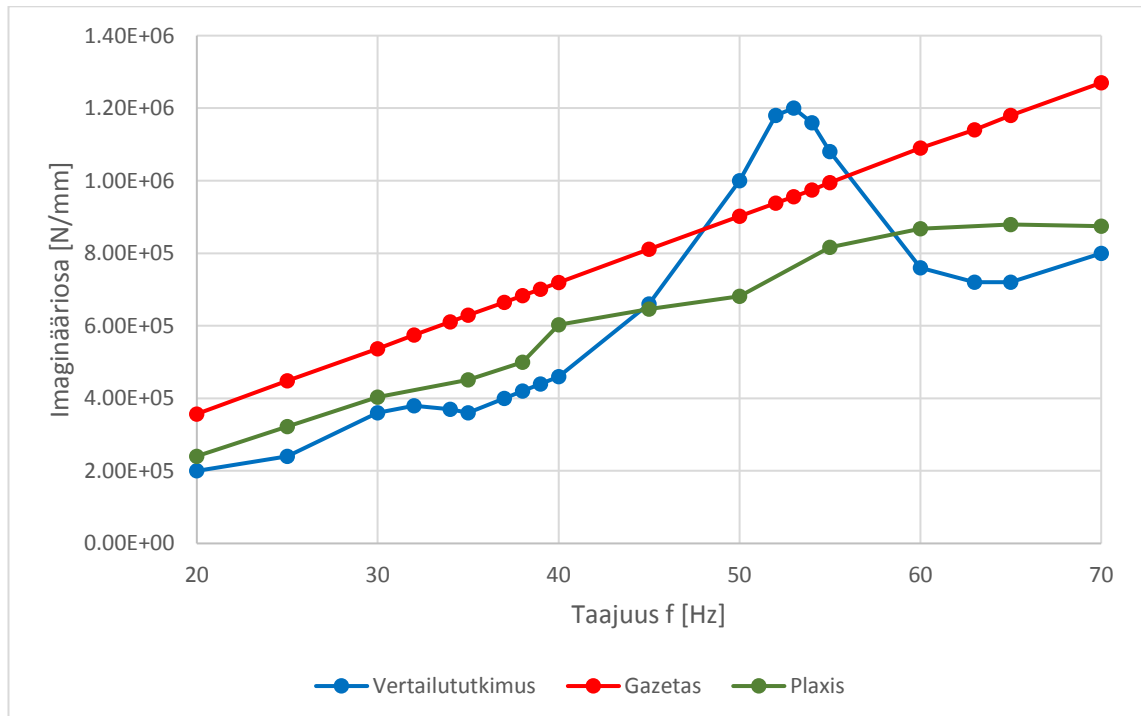
**Kuva 47.** Dynaamisen impedanssin imaginääriosat taajuuden funktiona, upotussyvyys 0 mm.



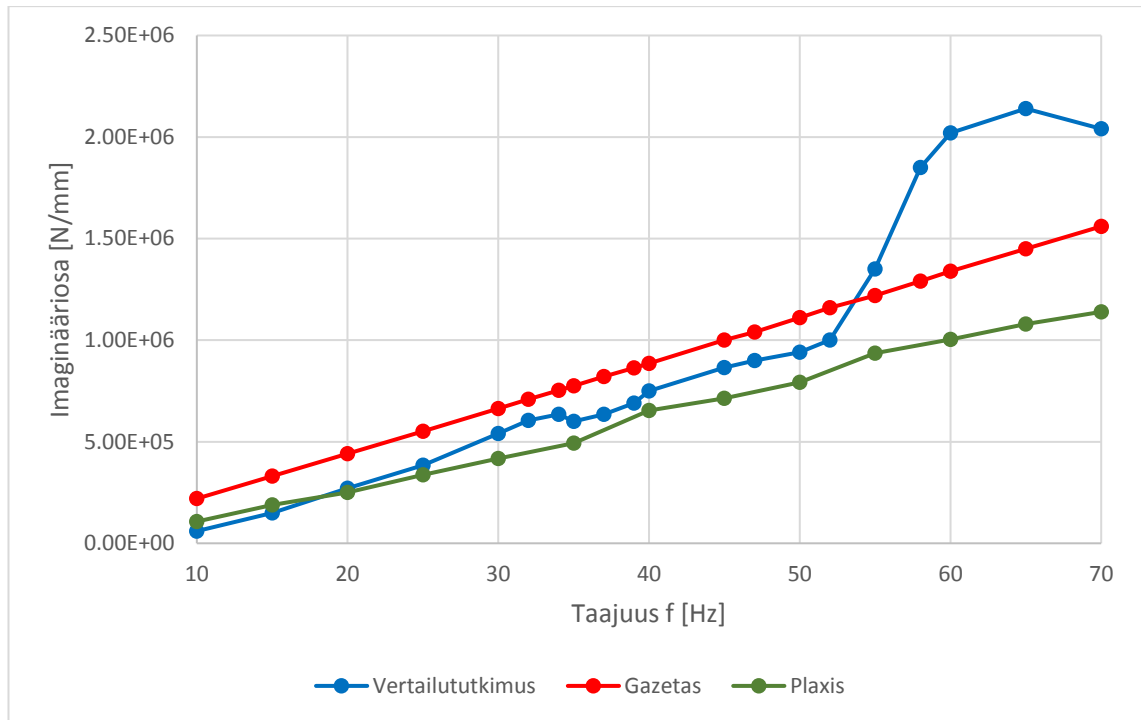
**Kuva 48.** Dynaamisen impedanssin imaginääriosat taajuuden funktiona, upotussyvyys 310 mm.



**Kuva 49.** Dynaamisen impedanssin imaginääriosia taajuuden funktiona, upotussyvyys 620 mm.



**Kuva 50.** Dynaamisen impedanssin imaginääriosia taajuuden funktiona, upotussyvyys 930 mm.



**Kuva 51.** Dynaamisen impedanssin imaginääriosia taajuuden funktiona, upotussyvyys 1240 mm.

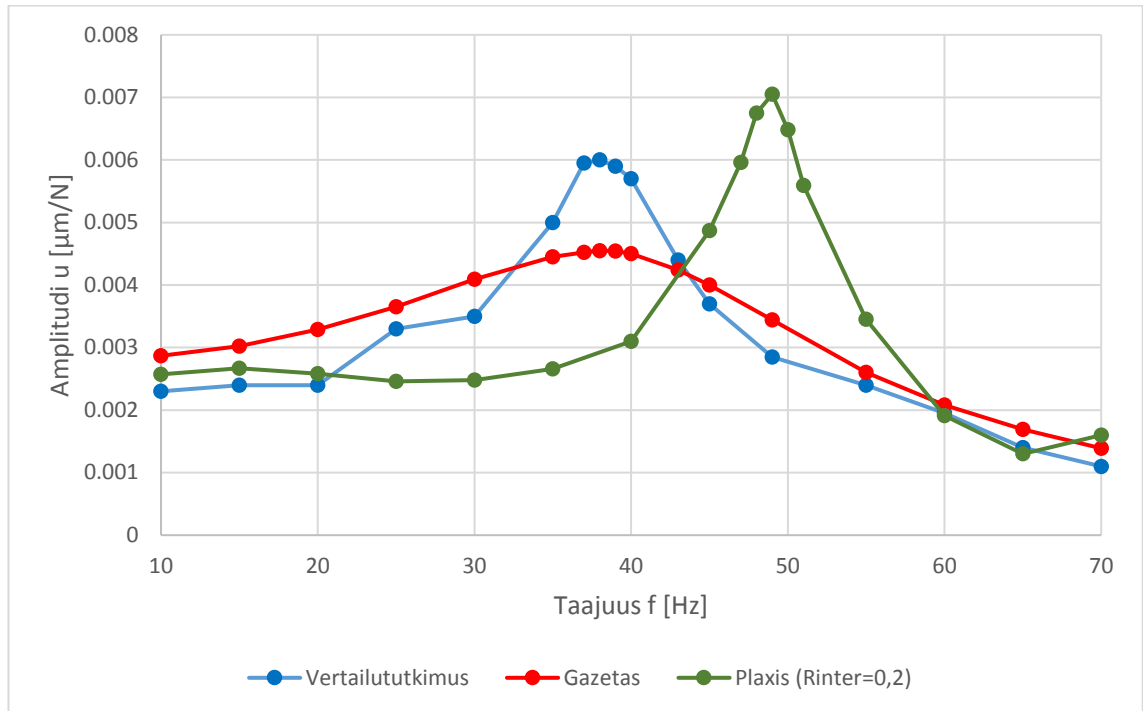
### 7.3 Perustuksen ja maan kontaktin redusointi

Kuten kappaleessa 4 on kerrottu, upotetun perustuksen ja maan välinen rajapinta on ympäröivää maata yleensä heikompi ja joustavampi. Nyt edellisessä alaluvussa Plaxiksella ja Gazetasin yhtälöillä määritetyt siirtymäamplitudit on laskettu osilla perustustapauksista uudelleen redusoidmalla maan ja perustuksen välistä kontaktia. Plaxiksessa tämä tapahtuu rajapintaelementtien lujuutta redusoidmalla ja Gazetasin yhtälöillä hyvän maakontaktin omaavan perustuksen pystyseiniä korkeutta pienentämällä.

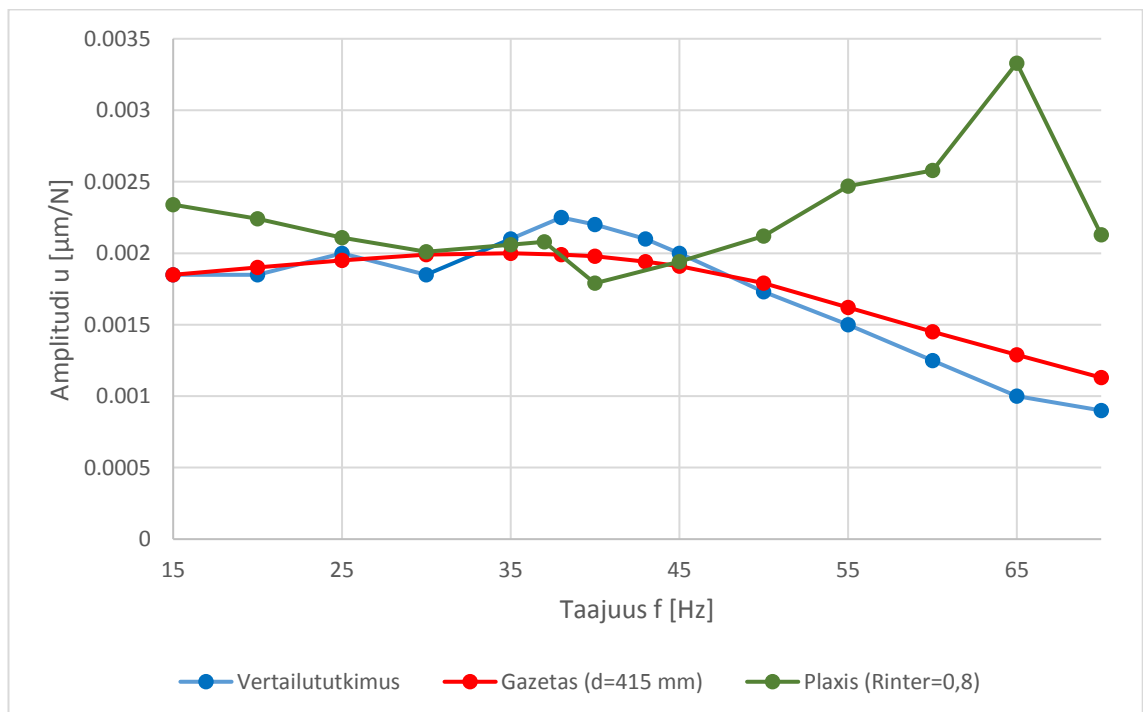
Perustuksen ja maan kontaktia pyrittiin redusoidmaan siten, että amplitudit vastaisivat paremmin vertailututkimuksen amplitudeja. Tutkitut perustustapaukset olivat pintaperustus, osittain upotettu perustus ja täysin upotettu perustus ja näiden upotussyvyudet 0 mm, 620 mm ja 1240 mm. Plaxiksella ei kuitenkaan redusoitu täysin upotettua perustusta, sillä sen amplitudit osuivat jo hyvin lähelle vertailututkimuksen arvoja redusoidmattomassa mallissa ja redusointi olisi vain kasvattanut amplitudeja ja täten lisännyt poikkeamaa. Gazetasin yhtälöillä puolestaan pintaperustusta ei ole mahdollista redusoida.

Plaxiksella lähtökohtana redusointiin oli se, että tietyllä upotussyvyydellä kaikilla taajuuksilla käytettiin samaa lujuusvähennyskerrointa  $R_{inter}$ . Pintaperustuksen tapauksessa lujuusvähennyskerrointa sovellettiin perustuksen pohjan ja maan väliseen rajapintaan, osittain upotetun perustuksen tapauksessa pohjan lisäksi perustuksen pystyseiniä ja maan väliseen kontaktipintaan. Raon sallittiin syntyvän maan ja perustuksen väliin.

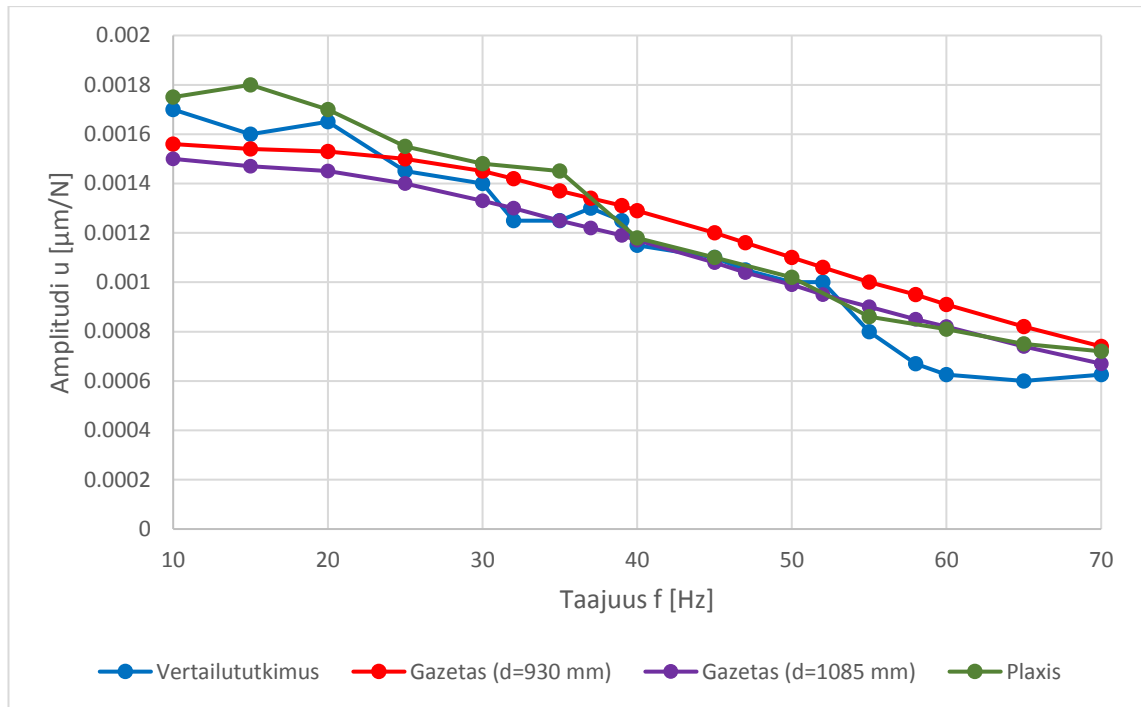
Redusoidut amplitudit on esitetty kuvissa 52 – 54 ja redusoinnissa käytetyt arvot on koottu taulukkoon 5.



**Kuva 52.** Pystysuuntaisen yksikkövoiman aiheuttama amplitudi taajuuden funktiona, upotussyvyys 0 mm, redusoitu.



**Kuva 53.** Pystysuuntaisen yksikkövoiman aiheuttama amplitudi taajuuden funktiona, upotussyvyys 620 mm, redusoitu.



**Kuva 54.** Pystysuuntaisen yksikkövoiman aiheuttama amplitudi taajuuden funktiona, upotussyvyys 1240 mm, redusoitu.

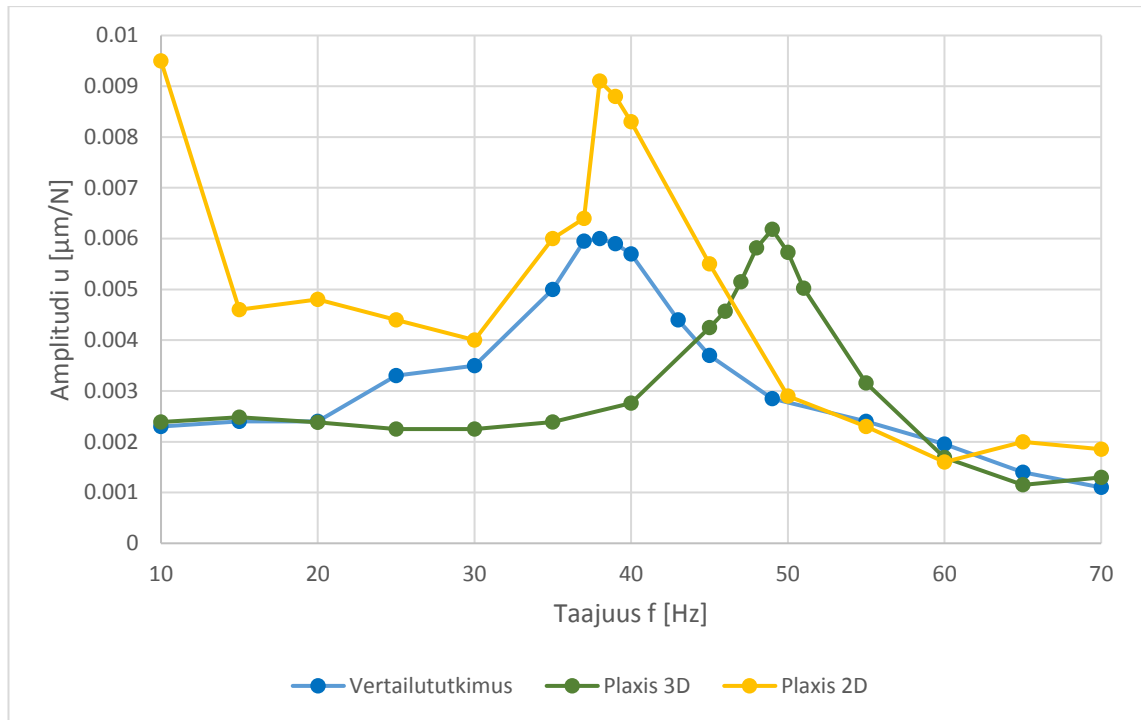
**Taulukko 5.** Redusoinnissa käytetyt arvot.

	Menetelmä	
	Plaxis	Gazetas
Upotussyvyys [mm]	$R_{inter}$ -arvo	Pystyseinien korkeus, jolla hyvä maakontakti d [mm]
0	0,2	-
620	0,8	415
1240	-	930, 1085

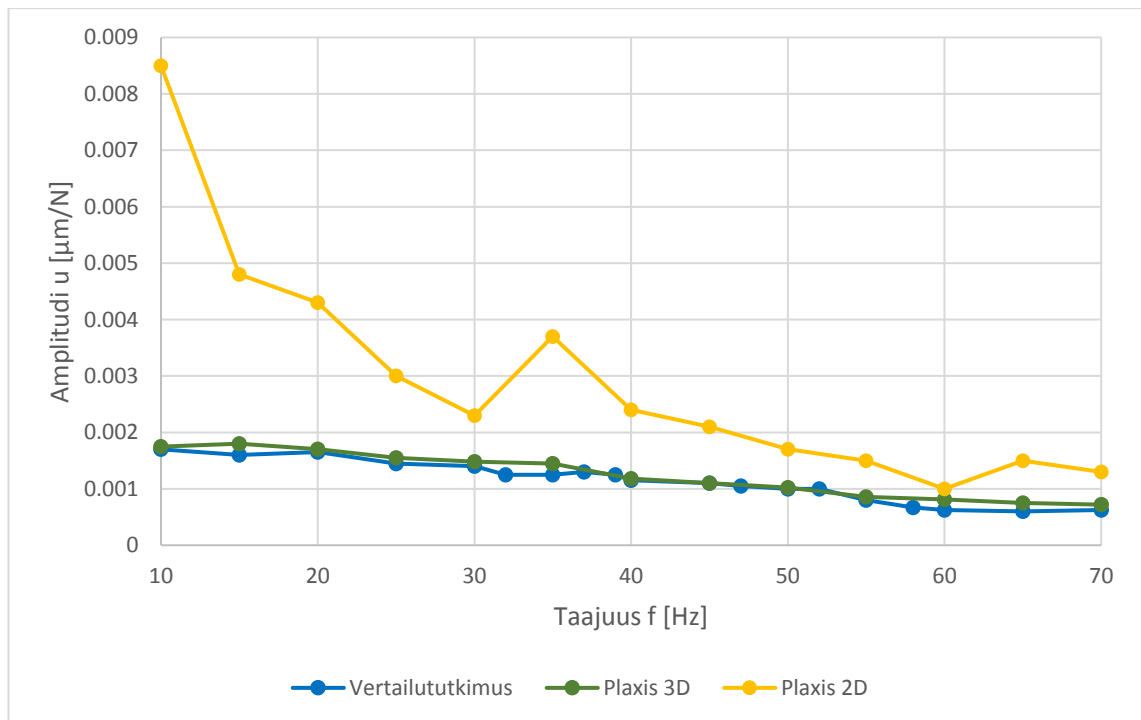
## 7.4 Plaxis 3D vs. 2D

Lopuksi työssä tutkitaan Plaxis 3D:lla ja Plaxis 2D:lla laskettujen pintaperustuksen ja täysin upotetun perustuksen siirtymien eroja. Merkittävimmäksi eroksi ohjelmien välillä muodostui vaadittu laskenta-aika: suurimmillaan kolmiulotteisen mallin laskenta kesti monikymmenkertaisesti pidempään kuin kaksiulotteisella mallilla. Tulokset on esitetty kuvissa 55 ja 56.





**Kuva 55.** Pystysuuntaisen yksikkövoiman aiheuttama amplitudi taajuuden funktiona, upotussyvyys 0 mm.



**Kuva 56.** Pystysuuntaisen yksikkövoiman aiheuttama amplitudi taajuuden funktiona, upotussyvyys 1240 mm

## 7.5 Tulosten tulkinta

Tarkasteltaessa perustuksen amplitudeja eri upotussyvyyksillä, ennakko-odotusten mukaisesti amplitudit pääasiallisesti pienenevät perustuksen upotussyvyyden kasvaessa. Gazetasin yhtälöillä lasketut amplitudit pienyvät kaikilla taajuuksilla ympäristäytöjen korkeuden noustessa eli kuvan 35 käyrät eivät risteä. Vertailututkimuksen tuloksissa tämä toteutuu myös suurimmissa määrissä, mutta 930 mm upotussyvyyden tapauksessa käyrä ei pysy suuremman ja pienemmän upotussyvyyden käyrän välissä, vaan 53 hertsin taajuudella esiintyy amplitudikuoppa, jonka jälkeen amplitudit kasvavat selvästi. Plaxiksen tuloksissa toteutuu myös amplitudien pieneneminen upotussyvyyden kasvaessa, poikkeuksena käytetyn taajuuskaistan suurimmat taajuudet (60 – 70 Hz). Kaikkien menetelmien käyristä olennainen havainto on se, että upottamattoman perustuksen amplitudit ovat etenkin resonanssitaajuudella huomattavasti upotettujen perustuksen amplitudeja suuremmat. Jo pienikin perustuksen upotus vaimentaa amplitudeja huomattavasti.

Upottamattoman perustuksen eli pintaperustuksen tapauksessa vasteeseen muodostuu resonanssihuippu. Vertailututkimuksen ja Gazetasin yhtälöiden resonanssitaajuudet ovat samat, 38 hertsiä. Plaxiksen antama resonanssitaajuus on 49 hertsiä, joten ero näiden välillä on merkittävä. Plaxiksen maksimiamplitudin arvo  $6,18 \mu\text{m/kN}$  on kuitenkin hyvin lähellä vertailututkimuksen maksimiarvoa  $6,00 \mu\text{m/kN}$ , kun taas Gazetasin yhtälöiden amplitudi jää huomattavasti pienemmäksi arvoon  $4,55 \mu\text{m/kN}$ .

Täysin upotetun perustuksen kohdalla kaikkien kolmen menetelmän tulokset osuvat lähelle toisiaan koko taajuuskaistalla. Lisäksi kuvaajien muodot mukailevat toisiaan: suurimmat amplitudit saavutetaan taajuuskaistan alapäässä käyrien laskiessa tasaisesti taajuuden kasvaessa. Selkeää amplitudihuippua ei muodostu millään menetelmällä.

Osittain upotettujen perustusten kohdalla Plaxiksella ja Gazetasin yhtälöillä määritetyt kuvaajat poikkeavat vertailututkimuksen tuloksista enemmän kuin täysin upotetun perustuksen kohdalla. Upotussyvyydellä 930 mm Plaxiksen ja Gazetasin yhtälöiden antamat amplitudit ovat hyvin lähellä toisiaan, mutta amplitudit jäävät pääasiassa vertailututkimuksen vastaavia alhaisemmiksi. Vertailututkimuksen kuvaajassa näyttäisi tapahtuvan jonkinlainen antiresonanssi-ilmiö amplitudin pudotessa jyrkästi ja kasvaen pudotuksen jälkeen uudelleen. Alhaisemmilla upotussyvyyksillä suurin ero käyrien välille syntyy siitä, että vertailututkimuksen käyrään muodostuu selkeä resonanssihuippu. Gazetasin yhtälöiden amplitudeista ei minkäänlaista selkeää, erillistä huippua ole nähtävissä. Upotussyvyydellä 310 mm Plaxiksen amplitudihuipun taajuus (53 Hz) on merkittävästi vertailututkimuksen resonanssitaajuutta (39 Hz) korkeampi. Plaxiksen amplitudihuippu näyttäisi siirtyvän suurempien taajuuksien suuntaan upotussyvyyden kasvaessa, kunnes se ei enää osu valitulle taajuuskaistalle.

Tiivistyksenä voidaan sanoa, että perustusten upotus pienentää selkeästi siirtymäamplitudeja. Eri menetelmillä määritetyistä amplitudeista voidaan näiden tulosten pohjalta sanoa,

että täysin upotettujen perustusten kohdalla sekä numeerinen menetelmä että analyyttinen menetelmä antavat hyvin todenmukaisen kuvan perustuksen käyttäytymisestä kaikilla esitetyillä taajuuksilla. Osittain upotettujen perustusten kohdalla sekä Gazetasin että Plaxiksen amplitudit ovat vertailututkimusta alhaisempia. Plaxiksella määritetyt resonanssihuiput osuvat selvästi todellista suuremmille taajuuksille. Tulokset viittaisivat siihen, että Plaxista ja Gazetasin yhtälöitä käytettäessä maan ja perustuksen välistä rajapinnan kontaktia tulisi redusoida, jotta päästään realistisempiin tuloksiin. Redusoinnin vaikutuksesta amplitudeihin on kerrottu seuraavassa alaluvussa.

Tarkasteltaessa impedanssifunktioita pintaperustuksen ja kahden pienimmän upotussyvyyden tapauksessa, vertailututkimuksen impedanssifunktioiden reaalisat pienenevät positiivisesta negatiiviseksi kaarevaa rataa pitkin taajuuden kasvaessa. Gazetasin yhtälöiden tulokset noudattelevat tätä melko tarkasti. Myös Plaxiksen tulokset noudattelevat tätä jossain määrin arvojen ollessa kuitenkin huomattavasti suuremmat. Kahdella suurimmalla upotussyvyydellä Gazetasin yhtälöiden käyrän muoto on sama kuin edellisissä tapauksissa, mutta vertailututkimuksen reaalisosa alkaa kasvaa suurilla taajuuksilla. Myös Plaxiksen reaalisosa kasvaa suurilla taajuuksilla, vaikkei se täysin noudatakaan vertailututkimuksen muotoa. Tuloksista voidaan päätellä, että systeemin jäykkyysominaisuuksien määrittäminen työssä käytetyillä menetelmillä muuttuu epätarkemmaksi taajuuden kasvaessa. Tämä voi johtua muun muassa siitä, että taajuuden kasvaessa värähtelyliikkeen jaksonaika muuttuu yhä pienemmäksi, jolloin vertailututkimuksen mittausepätarkuus mahdollisesti lisääntyy. Vastaavasti Plaxiksella taajuuden kasvun myötä herätteen ja vasteen amplitudien välinen aikaero vaikuttaa yhä voimakkaammin impedanssien arvoihin, jolloin esimerkiksi 70 hertsin taajuudella vasteen amplitudin ajanhetken sekunnin tuhannesosan poikkea vaikuttaa tuloksiin.

Imaginääriosan kohdalla on selkeää, että sen arvo kasvaa taajuuden kasvaessa. Erityisesti taajuuskaistan matalilla taajuuksilla eri menetelmien imaginääriosat noudattelevat melko hyvin toisiaan. Suuremmilla taajuuksilla hajontaa alkaa tapahtua enemmän. Kahdella suurimmalla upotussyvyydellä vertailututkimuksen tuloksissa esiintyy molemmissa amplitudihuippu, joita menetelmät eivät osaa ennustaa. Gazetasin yhtälöt pääasiassa yliarvioivat systeemin vaimennusominaisuuksia.

### 7.5.1 Redusoidut arvot

Pintaperustuksen pohjan ja maan välisen rajapinnan lujuuden redusointi Plaxiksella ei näytä johtavan alkuperäistä laskentaa tarkempiin tuloksiin. Redusointi kasvattaa amplitudia sitä enemmän mitä lähempänä resonanssitaajuutta ollaan. Resonanssitaajuuteen sillä ei näyttäisi olevan vaikutusta. Suhteellisen suurellakaan rajapinnan lujuuden vähennyksellä ( $R_{inter} = 0,2$ ) ei saada kovin suurta muutosta amplitudeihin. Amplitudit näyttävät kasvavan valitulla lujuusvähennyskertoimella resonanssitaajuuden läheisyydessä noin  $0,7\text{--}1,0\text{ }\mu\text{m/kN}$  ja muuten keskimäärin  $0,2\text{--}0,3\text{ }\mu\text{m/kN}$ .

Perustuksen, jonka upotussyvyys on 620 mm, pohjan ja pystyseiniin maakontaktia redusoidaan Plaxiksessa kertoimella  $R_{inter} = 0,8$ . Pintaperustukseen verrattuna upotetun perustuksen redusoidut amplitudit kasvavat voimakkaammin. Taajuuskaistan keskellä redusoidut arvot ovat lähempänä vertailututkimuksen arvoja kuin redusoimattomat. Kaistan ala- ja yläpäässä redusoidut arvot poikkeavat alkuperäisiä enemmän, sillä jo alkupe-  
räiset arvot ovat vertailututkimuksen arvoja suurempia. Gazetasin yhtälöillä redusoin-  
nissa käytetään hyvän maakontaktin omaavan perustuksen korkeutena 415 mm, joka on  
likimain 2/3 perustuksen upotussyvyydestä. Tällä arvolla tulokset ovat lähempänä vertai-  
lututkimusta kuin redusoimattomilla arvoilla. Käyrän muoto vastaa hyvin vertailututki-  
muksen tuloksia, mutta amplitudihuippu on vertailututkimusta matalampi ja suurimmilla  
taajuuksilla amplitudit hieman todellisuutta suurempia.

Gazetasin yhtälöillä laskettuja täysin upotetun perustuksen amplitudeja redusointiin siten,  
että hyvän maakontaktin omaavien pystyseiniin korkeuksina käytettiin arvoja 930 mm ja  
1085 mm (eli 3/4 ja 7/8 upotussyvyydestä). Tämä tarkoittaa, että maanpinnalla löyhän  
maan syvyyden katsottiin olevan 1/4 ja 1/8 upotussyvyydestä. Kuvasta 54 ilmenee, että  
taajuusvälillä 25 Hz – 50 Hz 1085 mm tehollisella korkeudella saadaan lähes täysin ver-  
tailututkimuksen tuloksia vastaavia arvoja. Alhaisimmilla taajuuksilla 930 mm tehollis-  
ella korkeudella päästään vertailututkimuksen arvoja lähemmäksi. Suurimmilla taajuuk-  
silla Gazetasin yhtälöt ennustavat todellista suurempia amplitudeja. Tulosten perusteella  
täysin upotetun perustuksen tapauksessa maanpinnan löyhän maan osuutta ei pidä huo-  
mioida laskuissa vaan tehollisen pystyseiniin korkeuden tulee olla todellista perustuksen  
korkeutta pienempi. Tässä tarkastellun perustuksen tapauksessa hyvän maakontaktin ol-  
lessa 3/4 perustuksen upotussyvyydestä päästään taajuuskaistan pienempiä taajuuksia lu-  
kuun ottamatta varmalla puolella oleviin, todellisuutta realistisesti kuvaaviin tuloksiin.

Edellisen perusteella Plaxiksen maan ja perustuksen välisen rajapinnan lujuutta redusoi-  
malla voidaan perustuksen amplitudeja kasvattaa. Taajuusvastekuvaajan muotoon  
redusointi ei käytännössä vaikuta. Gazetasin yhtälöitä käytettäessä on tarpeen pienentää  
ympäristäytöjen vaikutusta. Tässä työssä osittain upotetun perustuksen tapauksessa te-  
hollisen korkeuden ollessa 2/3 upotussyvyydestä päästiin tarkimpiin tuloksiin, mutta täl-  
löinkin amplitudihuipun arvo on aliarvioitu. Täysin upotetun perustuksen kohdalla pääs-  
tään vertailututkimusta paremmin vastaaviin tuloksiin tehollisen korkeuden ollessa 3/4–  
7/8 perustuksen upotussyvyydestä.

## 7.5.2 Plaxiksen kaksi- ja kolmiulotteisen mallin erot

Pintaperustuksen kohdalla kaksiulotteisen mallin avulla määritetty resonanssitaajuus vas-  
taa vertailututkimuksen taajuutta, toisin kuin kolmiulotteisella mallilla laskettaessa. Kak-  
siulotteinen malli kuitenkin aliarvioi vaimennusta kolmiulotteista mallia enemmän, reso-  
nanssiamplitudin ollessa noin 50 % vertailututkimusta suurempi. Kaksiulotteinen malli

myös antaa 10 hertsin kohdalle amplitudipiikin, jossa laskettu siirtymä on nelinkertainen todelliseen verrattuna.

Kolmiulotteinen malli ennustaa kaksiulotteista mallia paremmin täysin upotetun perustuksen siirtymät, sillä kaksiulotteinen malli aliarvioi tässäkin tapauksessa systeemin vaimennusta kaikilla tutkituilla taajuuksilla. Myös täysin upotetulla perustuksella esiintyy suuri amplitudipiikki 10 hertsin taajuudella. Piikin syytä on vaikea sanoa: Se ei johdu ominaisvärähtelystä, mikä varmistettiin simuloimalla värähtelyä hyvin pitkällä aikavälillä.

Tässä työssä kaksiulotteisella mallilla lasketuista siirtymistä ei voi tehdä yleispäteviä johtopäätöksiä vähäisestä vertailutapausten määrästä johtuen, mutta tässä kaksiulotteinen malli ennustaa amplitudit liian suuriksi, mikä on toisaalta varmalla puolella suunnittelun kannalta. Tämä vaimennuksen aliarviointi johtuu mahdollisesti juuri kolmannen ulottuvuuden puutteesta. Lisäksi mallien erilaisilla elementtityypeillä saattaa olla vaikutusta. Käytännön suunnittelussa kaksiulotteista mallia voidaan hyödyntää muiden menetelmien tukena.

### 7.5.3 Mahdolliset virhelähteet

Analyttisen ja numeerisen menetelmän sekä vertailututkimuksen tulosten välisiin eroihin on vaikuttanut menetelmien jäykkyuden ja vaimennuksen arviointi. Laskennallisilla menetelmillä on pyritty kuvaamaan todellista tilannetta mahdollisimman tarkasti, mutta eroa todelliseen systeemiin syntyy aina väistämättä jonkin verran. Erot johtuvat muun muassa seuraavista seikoista:

- Massakeskiön korkeus vaikuttaa perustusten ominaistajuuteen (Krannila 2013). Numeerisessa mallissa perustuksen ja laitteen yhteinen massakeskipiste on perustuksen massakeskipisteessä, sillä laitetta ei ole mallinnettu. Todellisuudessa yhteinen massakeskipiste on perustuksen massakeskipisteen yläpuolella.
- Laskuissa perustusta kuormittaa täysin pystysuuntainen värähtely, jolloin perustus liikkuu vain pystysuunnassa, mutta koekuormituksissa perustus liikkuu todennäköisesti vähäisissä määrin myös sivusuunnassa.
- Vertailututkimuksen kokeellisessa mittauksessa upotetun perustuksen ympäriltä poistettiin maakerroksia yksi kerrallaan. Vaikka tämä kerrosten poistaminen olisi tehty hyvin huolellisesti, todennäköisesti jäljelle jäävien ympärystäytöjen maa on häiriintynyt jonkin verran.
- Maa ei todellisuudessa ole tasalaatuista ja vertailututkimuksessa mitattu maan leikkausmoduuli syvyyden funktiona edustaa vain yhtä mittauspistettä. Numeerisessa mallissa maa mallinnettiin kahtena kerroksena, Gazetasin yhtälöillä vain yhtenä.
- Työssä vertailuaineistona käytettiin vain yhtä tutkimusta. Kokeellisessa tutkimuksessa saattaa esiintyä inhimillisiä virheitä käytännön toteutuksessa, mittauksissa

tai tulosten tulkinnassa. Etenkin kun mitatut amplitudit ovat todella pieniä, mitauslaitteiston herkkyydellä on suuri vaikutus. Mahdollisesti vertailuaineiston raportista on jäänyt mainitsematta jokin mittaustuloksiin vaikuttanut tekijä.

- Maan jäykkyys pinnan läheisyydessä on todellisuudessa lähellä nollaa.
- Plaxiksessa käytetty maamalli on täysin lineaarielastinen, mikä ei täysin vastaa todellisuutta. Perustus ja maa pysyivät kiinni toisissaan koko kuormituksen ajan eikä rakoa niiden välille syntynyt redusointitapauksia lukuun ottamatta. Todellisuudessa rajapinnassa tapahtui maan epälineaarista käyttäytymistä.
- Vertailututkimuksen tuloksia ei ollut esitetty lukuarvoilla, ainoastaan kuvaaja-muodossa. Arvojen tulkinta kuvaajista saattaa aiheuttaa muutaman prosentin virheen. Myös Gazetasin yhtälöiden kertoimien approksimointi taulukoista saattaa aiheuttaa virhettä.

## 8. YHTEENVETO

Diplomityössä tutkittiin pystysuuntaiselle harmoniselle värähtelylle altistettuja maanvaraisia laiteperustuksia upotussyvyyksillä 0 mm, 310 mm, 620 mm, 930 mm ja 1240 mm. Perustukset olivat betonisia massiiviperustuksia, kooltaan 1200 mm x 1200 mm x 1240 mm ja käytetyn herätteen taajuuskaista 10 Hz – 70 Hz. Perustuksen amplitudit ja dynaamiset impedanssit määritettiin sekä numeerisesti Plaxis 3D:lla että analyttisesti Gazetasin yhtälöillä. Lisäksi sivutyönä tarkasteltiin Plaxiksen kaksi- ja kolmiulotteisen mallin tulosten eroja.

Plaxis 3D:n laskentatulokset korreloivat hyvin vertailutulosten kanssa täysin upotetun perustuksen kohdalla. Pintaperustuksen ja osittain upotettujen perustusten kohdalla Plaxiksen taajuusvastekuvaaja ei ollut yhteneväinen vertailukuvaajien kanssa johtuen Plaxiksen pääasiassa pienemmistä vertailuamplitudeista ja poikkeavista resonanssitaajuuksista. Redusointikertoimet eivät juuri parantaneet tuloksia.

Gazetasin yhtälöillä määritetyt taajuusvastekuvaajat olivat muodoltaan enemmän yhteneviä koekuormitustulosten kanssa kuin Plaxiksen tulokset. Täysin upotetun perustuksen tapauksessa amplitudit täsmäsivät hyvin koetulosten kanssa, kuten Plaxiksenkin kohdalla. Muilla upotussyvyyksillä resonanssitaajuudet vastasivat mitattuja taajuuksia, mutta amplitudit olivat pääasiassa vertailututkimuksen mukaisia pienempiä. Redusointikertoimia käyttämällä tulokset saatiin vastaamaan hyvinkin realistisesti todellisten perustusten käyttäytymistä.

Sekä Plaxiksella että Gazetasin yhtälöillä määritetyt dynaamisten impedanssifunktioiden reaalisosat korreloivat vertailutulosten kanssa parhaiten pienillä taajuuksilla. Gazetasin yhtälöiden antamat arvot pintaperustuksen ja kahden matalimman upotussyvyyden perustuksen tapauksessa korreloivat koetulosten kanssa hyvin. Imaginääriosien kuvaajien muoto vastasi pääasiassa koetuloksia ja vain suurimmilla taajuuksilla eroa syntyi merkittävästi.

Plaxiksen kaksiulotteisella mallilla määritetty pintaperustuksen resonanssitaajuus vastasi koetulosten taajuutta, toisin kuin kolmiulotteisella mallilla. Toisaalta kaksiulotteinen malli aliarvioi pinta- sekä täysin upotetun perustuksen koko taajuuskaistalla systeemin vaimennusta.

Tässä työssä saatujen tulosten pohjalta voidaan todeta, että ympärystäytöjen redusointia käytettäessä Gazetasin yhtälöiden amplitudit näyttäisivät täsmäävän todellisten tulosten kanssa käytännön suunnittelutyön vaatimalla tarkkuudella. Täysin upotetun perustuksen tarkkoihin tuloksiin päästiin jättämällä sivutäytöjen vaikutus huomiotta 1/8–1/4 perustuksen kokonaiskorkeuden syvyiseltä alueelta. Vastaava arvo 620 mm upotussyvyydellä

oli 1/3. Tulokset ovat tarkimpia täysin upotetun perustuksen tapauksessa. Gazetasin yhtälöt näyttäisivät aliarvioivan resonanssiamplitudia etenkin pintaperustuksen kohdalla, mikä on otettava huomioon suunnittelutyössä. Laiteperustusten suunnittelun kannalta olennaiset resonanssitaajuudet korreloivat mitattujen tulosten kanssa. Plaxis 3D:n amplitudit täsmäävät hyvin täysin upotetun perustuksen kohdalla, mutta muissa tapauksissa tulokset poikkesivat selkeästi koekuormitusten tuloksista.

Tämän diplomityön aihealue tarjoaa mahdollisuudet hyvin moninaisiin töihin. Tässä työssä tutkittiin vain massiivisen laiteperustuksen pystyvärähtelyä. Vastaavanlainen analyysi olisi hyödyllinen toteuttaa myös muilla värähtelymuodoilla, sillä nyt ei voida varmasti sanoa, miten työssä käytetyillä menetelmillä muiden värähtelymuotojen todenmukainen kuvaaminen onnistuu. Erityisesti kytketyn värähtelyn tapauksessa tutkimus olisi paikallaan pystyvärähtelystä huomattavasti poikkeavan käyttäytymisen takia.

Mikäli upotettujen perustusten kohdalla Plaxiksen tai Gazetasin redusointikertoimista halutaan tehdä yleisesti voimassaolevia päätelmiä, pitäisi perustuksia tutkia laajemmin eri upotussyvyyksillä sekä eri maalajeilla.



## LÄHTEET

Arya, S.C., O'Neill, M.W. & Pincus, G. (1979). *Design of Structures and Foundations for Vibrating Machines*, Gulf Pub Co, Houston, TX.

Atkinson, J.H. & Sallfors, G. (1991). *Experimental Determination of Soil Properties*. General Report to Session 1, pp. 915–956.

Bachmann, H. & Ammann, W. (1987). *Vibrations in Structures: Induced by Man and Machines*, IABSE, Zürich.

Bhatia, K.G. (2008). *Foundations for Industrial Machines: Handbook for Practising Engineers*, D-CAD, New Delhi.

Bouzonis, E. (2013). *Numerical Modeling of the Dynamic Lateral Response of Caisson Foundations*, Diploma Thesis, School of Civil Engineering, Geotechnical Division, National Technical University of Athens.

Chae, Y.S. (1970). *Dynamic Behaviour of Embedded Foundation-Soil Systems*, Highway Research Record, (323).

Chopra, A.K. (2011). *Dynamics of Structures*, 4th ed. Pearson/Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Chowdhury, I. & Dasgupta, S.P. (2003). *Computation of Rayleigh Damping Coefficients for Large Systems*, The Electronic Journal of Geotechnical Engineering, Vol. 8(0), pp. 1–11.

Chowdhury, I. & Dasgupta, S.P. (2008). *Dynamics of Structure and Foundation-A Unified Approach: 2. Applications*, CRC Press, Boca Raton, FL.

Clough, R.W. & Penzien, J. (2003). *Dynamics of Structures*, 3rd ed. Computers & Structures, Berkeley, CA.

Das, B.M. & Ramana, G.V. (2010). *Principles of Soil Dynamics*, 2nd ed. Cengage Learning, Stamford, CT.

Datta, M. & Gulhati, S.K. (2005). *Geotechnical Engineering*, Tata McGraw-Hill Education, New Delhi.

Gazetas, G. (1991a). *Foundation Vibrations*, in: Fang, H. (ed.), *Foundation Engineering Handbook*, Springer, Boston, MA, pp. 553–593.

Gazetas, G. (1983). *Analysis of Machine Foundation Vibrations: State of the Art*, International Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 2(1), pp. 2–42.

Gazetas, G. (1991b). Formulas and Charts for Impedances of Surface and Embedded Foundations, *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 117(9), pp. 1363–1381.

Haataja, J., Heikonen, J., Leino, Y., Rahola, J., Ruokolainen, J. & Savolainen, V. (2002). *Numeeriset menetelmät käytännössä*, Picaset Oy, Helsinki.

Inman, D.J. (2007). *Engineering Vibration*, 3rd ed. Pearson, Upper Saddle River, NJ.

Juuti, J. (2016). *Vaakasuuntaisesti värähtelevien paaluperustusten dynaamiset analyysimenetelmät*, Diplomityö, Talouden ja rakentamisen tiedekunta, Tampereen teknillinen yliopisto.

Kouhia, R. & Tuomala, M. (2009). *Rakennetekniikan numeeriset menetelmät*, Tampereen teknillinen yliopisto.

Krannila, I. (2013). *Kaivosteollisuuden dynaamisesti kuormitettujen laiteperustusten mitoitus*, Diplomityö, Konetekniikan osasto, Oulun yliopisto.

Kuhlemeyer, R.L. & Lysmer, J. (1973). Finite Element Method Accuracy for Wave Propagation Problems, *Journal of Soil Mechanics & Foundations Division*, Vol. 99.

Lamb, H. (1904). I. On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, Vol. 203(359-371), pp. 1-42.

Lee, J. P. et al. (2004). 351.3 R-04 Foundations for Dynamic Equipment, American Concrete Institute.

Lin, A.N. & Jennings, P.C. (1984). Effect of Embedment on Foundation-Soil Impedances, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 110(7), pp. 1060-1075.

Ling, X.Z., Zhang, F., Li, Q.L., An, L.S. & Wang, J.H. (2015). Dynamic Shear Modulus and Damping Ratio of Frozen Compacted Sand Subjected to Freeze–Thaw Cycle Under Multi-Stage Cyclic Loading, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 76 pp. 111–121.

Lou, M., Wang, H., Chen, X. & Zhai, Y. (2011). Structure–Soil–Structure Interaction: Literature Review, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 31(12), pp. 1724-1731.

Luna, R. & Jady, H. (2000). Determination of Dynamic Soil Properties Using Geophysical Methods, *Proceedings of the First International Conference on the Application of Geophysical and NDT Methodologies to Transportation Facilities and Infrastructure*, St. Louis, MO.

Lysmer, J. & Kuhlemeyer, R.L. (1969). Finite Dynamic Model for Infinite Media, *Journal of the Engineering Mechanics Division* 95.4, pp. 859–878.

Mbawala, S.J. (2015). Behaviour of Machine Foundations Subjected to Vertical Dynamic Loading, Doctoral Thesis, Faculty of Engineering, Built Environment and Information Technology, University of Pretoria.

Novak, M. (1970). Prediction of Footing Vibrations, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, Vol. 96(3), pp. 837-861.

Novák, M. & Beredugo, Y.O. (1972). Vertical Vibration of Embedded Footings, Journal of Soil Mechanics & Foundations Division, Vol. 98(Sm 11).

Plaxis 3D - General Information, (2018). Saatavissa: [https://www.plaxis.com/?plaxis\\_download=3D-0-Gen-Info-1.pdf](https://www.plaxis.com/?plaxis_download=3D-0-Gen-Info-1.pdf) [viitattu 12.11.2018].

Plaxis 3D - Reference Manual, (2018). Saatavissa: [https://www.plaxis.com/?plaxis\\_download=3D-2-Reference-1.pdf](https://www.plaxis.com/?plaxis_download=3D-2-Reference-1.pdf) [viitattu 2.4.2019].

Plaxis 3D - Scientific Manual, (2018). Saatavissa: [https://www.plaxis.com/?plaxis\\_download=3D-4-Scientific-1.pdf](https://www.plaxis.com/?plaxis_download=3D-4-Scientific-1.pdf) [viitattu 20.3.2019].

Plaxis 3D - Tutorial Manual, (2018). Saatavissa: [https://www.plaxis.com/?plaxis\\_download=3D-1-Tutorial-1.pdf](https://www.plaxis.com/?plaxis_download=3D-1-Tutorial-1.pdf) [viitattu 1.2.2019].

Prakash, S. (1981). Soil Dynamics, McGraw-Hill Companies, USA.

Prakash, S. & Puri, V.K. (2006). Foundations for Vibrating Machines, Journal of Structural Engineering, Vol. 33(1), pp. 13-29.

PSK Standardisointi, Saatavissa: <https://psk-standardisointi.fi/> [viitattu 28.3.2019].

Rao, N.K. (2011). Foundation Design: Theory and Practice, John Wiley & Sons, Singapore.

Richart, F.E. (1962). Foundation Vibrations, Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 127(1), pp. 863-897.

Salmi, T. (1998). Statiikka, Pressus, Tampere.

Salmi, T. & Pajunen, S. (2010). Lujuusoppi, Pressus, Tampere.

Salmi, T. & Virtanen, S. (2006). Dynamiikka, Pressus, Tampere.

SFS-EN 1991-3, (2016). Eurokoodi 1. Rakenteiden kuormat. Osa 3: Nostureista ja muista koneista aiheutuvat kuormat, Suomen standardisoimisliitto SFS.

SFS-ISO 21940-11, (2017). Mechanical Vibration. Rotor Balancing . Part 11: Procedures and Tolerances for Rotors with Rigid Behaviour, Suomen Standardisoimisliitto SFS.

Silver, M.L. & Seed, H.B. (1971). Deformation Characteristics of Sands Under Cyclic Loading, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, Vol. 97(8), pp. 1081–1098.

Singiresu, S.R. (1995). *Mechanical Vibrations*, 3rd ed. Addison Wesley, USA.

Srinivasulu, P. & Vaidyanathan, C.V. (1976). *Handbook of Machine Foundations*, Tata McGraw-Hill Education, New Delhi.

Suomen Standardisoimisliitto SFS, Saatavissa: <https://www.sfs.fi/> [viitattu 28.3.2019].

Varghese, P.C. (2005). *Foundation Engineering*, PHI Learning Pvt. Ltd., New Delhi.

Whitman, R.V. & Richart, F.E. (1967). Design Procedures for Dynamically Loaded Foundations, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, Vol. 93(6), pp. 169–193.

Woods, R.D. (1968). Screening of Surface Waves in Soils, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, Vol. 4(4), pp. 951–980.

# LIITE A: GAZETASIN YHTÄLÖIHIN PERUSTUVA LASKENTA-POHJA

## Maanvaraisten laiteperustusten vaste

Laskentapohja perustuu dynaamisten impedanssifunktioiden määrittämiseen Gazetasin yhtälöiden avulla. Laskentapohjalla on mahdollista laskea maanvaraisen laiteperustuksen pysty-, vaaka- ja rotaatiövärähtelyn sekä kytketyn värähtelyn amplitudit halutuilla taajuuksilla sekä pintaperustuksen että upotetun perustuksen tapauksessa. Amplitudit lasketaan perustuksen pohjan keskipisteen suhteen.

### SISÄLTÖ

1. PINTAPERUSTUS
2. UPOTETTU PERUSTUS

*Kehystetyt alueet keltaisella pohjalla = käyttäjän syöttämät lähtötiedot*

*Alueet turkoosilla pohjalla = Tulokset*

## 1. Pintaperustus

### Lähtötiedot

#### Perustuksen geometria

Perustuksen ja maan välinen kontaktipinta on ympäröity suorakulmiolla, jonka sivumitat ovat 2L ja 2B. Laskentapohjaa voidaan käyttää eri muotoisten perustusten tapauksessa. Huomaa kuitenkin, että alla esitetyt perustuksen geometristen ominaisuuksien kaavat pätevät vain suorakulmaisten perustusten kohdalla. Upotettujen perustusten laskennassa hyödynnetään pintaperustuksen dynaamisia kertoimia.

$$B := 0.6\text{m}$$

Lyhyemmän sivumitan puolikas

$$L := 0.6\text{m}$$

Pidemmän sivumitan puolikas

$$\text{Tarkastus} := \begin{cases} \text{"OK!"} & \text{if } L \geq B \\ \text{"Sivumitat väärin!"} & \text{otherwise} \end{cases} = \text{"OK!"}$$

$$H := 1.24\text{m}$$

Perustuksen korkeus

$$m_p := \frac{24 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \cdot 2B \cdot 2L \cdot H}{g} + 361.4\text{kg} = 4731.3\text{kg}$$

Perustuksen massa

$$A_b := 2B \cdot 2L = 1.44\text{m}^2$$

Maan ja perustuksen välisen kontaktipinnan ala

$$I_{bx} := \frac{1}{12} \cdot (2B)^3 \cdot 2L = 0.1728\text{m}^4$$

Maan ja perustuksen välisen kontaktipinnan neliömomentti x-akselin ympäri

$$I_{by} := \frac{1}{12} \cdot (2L)^3 \cdot 2B = 0.1728\text{m}^4$$

Maan ja perustuksen välisen kontaktipinnan neliömomentti y-akselin ympäri

$$I_b := I_{bx} + I_{by} = 0.3456\text{m}^4$$

Maan ja perustuksen välisen kontaktipinnan polaarinen neliömomentti z-akselin ympäri

$$I_x := \frac{1}{12} \cdot m_p \cdot [(2B)^2 + 4 \cdot H^2] = 2992.73\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Hitausmomentti x-akselin ympäri

$$I_y := \frac{1}{12} \cdot m_p \cdot [(2L)^2 + 4 \cdot H^2] = 2992.73\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Hitausmomentti y-akselin ympäri

#### Maan ominaisuudet

$$E := 250\text{MPa}$$

Kimmoduuli

$$\nu := 0.25$$

Poissonin luku

$$\rho := 2000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\beta := 0$$

$$G := \frac{E}{2(1 + \nu)} = 100 \cdot \text{MPa}$$

$$V_s := \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 223.61 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V_{La} := \frac{3.4}{\pi \cdot (1 - \nu)} \cdot V_s = 322.67 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Koneen aiheuttama heräte

$$f := 40 \text{ Hz}$$

$$F := 1 \text{ N}$$

$$M := 1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot f = 251.33 \frac{1}{\text{s}}$$

$$a_0 := \frac{\omega \cdot B}{V_s} = 0.67$$

Pystyvärähtely, z-akselin suunta

$$k_z := 0.96$$

$$c_z := 0.93$$

$$K_z := \frac{2 \cdot G \cdot L}{1 - \nu} \cdot \left[ 0.73 + 1.54 \left( \frac{A_b}{4 \cdot L^2} \right)^{0.75} \right] = 363200 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$K_{z,\text{dyn}} := K_z \cdot k_z = 348672 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$C_{z,\text{rad}} := (\rho \cdot V_{La} \cdot A_b) \cdot c_z = 864.2 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$C_z := C_{z,\text{rad}} + \frac{2 \cdot K_{z,\text{dyn}}}{\omega} \cdot \beta = 864.2 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$u_z := \frac{F}{\sqrt{(K_{z,\text{dyn}} - m_p \cdot \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot C_z^2}} = 0.004487 \mu\text{m}$$

Suuntaa antava taajuusvastekuvaaja

$$f := 0 \text{ Hz}, 0.01 \text{ Hz}, 80 \text{ Hz}$$

$$\omega(f) := 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$u_z(f) := \frac{F}{\sqrt{(K_{z,\text{dyn}} - m_p \cdot \omega(f)^2)^2 + \omega(f)^2 \cdot C_z^2}}$$

Oheinen taajuusvastekuvaaja on vain suuntaa antava. Siinä ei ole huomioitu Gazetasin korjauskertoimia. Siirtymien tarkka arvo on laskettava jokaisella taajuudella erikseen edellä esitetyillä kaavoilla.

Tiheys

Materiaalivaimennuskerroin

Liukumoduuli

Leikkausaallon nopeus

Lysmerin analogian aallon nopeus

Koneen herätetaajuus

Voiman amplitudi

Momentin amplitudi

Herätekulmataajuus

Dimensioton taajuus

Dynaaminen jäykkyskerroin

Säteilyvaimennuksen korjauskerroin

Staatinen jäykkyys

Dynaaminen jäykkyys

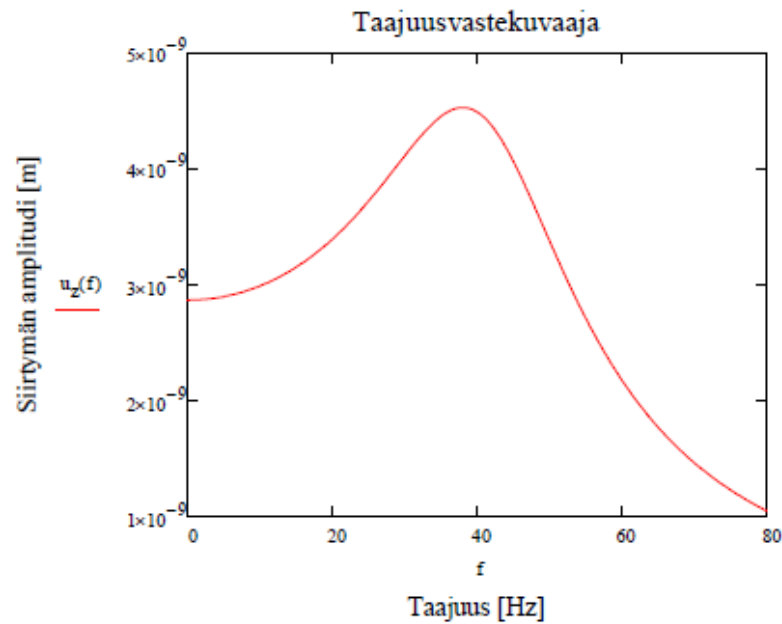
Säteilyvaimennuskerroin

Kokonaisvaimennuskerroin

Pystyvärähtelyn amplitudi

Tarkasteltava taajuusalue

Siirtymä taajuuden funktiona



Vaakavärähtely, y-akselin suunta

$$k_y := 0.98$$

$$c_y := 0.9$$

Dynaaminen jäykkyskerroin

Säteilyvaimennuksen korjauskerroin

$$K_y := \frac{2 \cdot G \cdot L}{2 - \nu} \left[ 2 + 2.50 \left( \frac{A_b}{4 \cdot L^2} \right)^{0.85} \right] = 308571.4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Staatinen jäykkyys

$$K_{y,\text{dyn}} := K_y \cdot k_y = 302400 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Dynaaminen jäykkyys

$$C_{y,\text{rad}} := (\rho \cdot V_s \cdot A_b) \cdot c_y = 579.6 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$$

Säteilyvaimennuskerroin

$$C_y := C_{y,\text{rad}} + \frac{2 \cdot K_{y,\text{dyn}}}{\omega} \cdot \beta = 579.6 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$$

Kokonaisvaimennuskerroin

$$u_y := \frac{F}{\sqrt{(K_{y,\text{dyn}} - m_p \cdot \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot C_y^2}} = 0.006863 \mu\text{m}$$

Vaakavärähtelyn amplitudi

Suuntaa antava taajuusvastekuvaaja

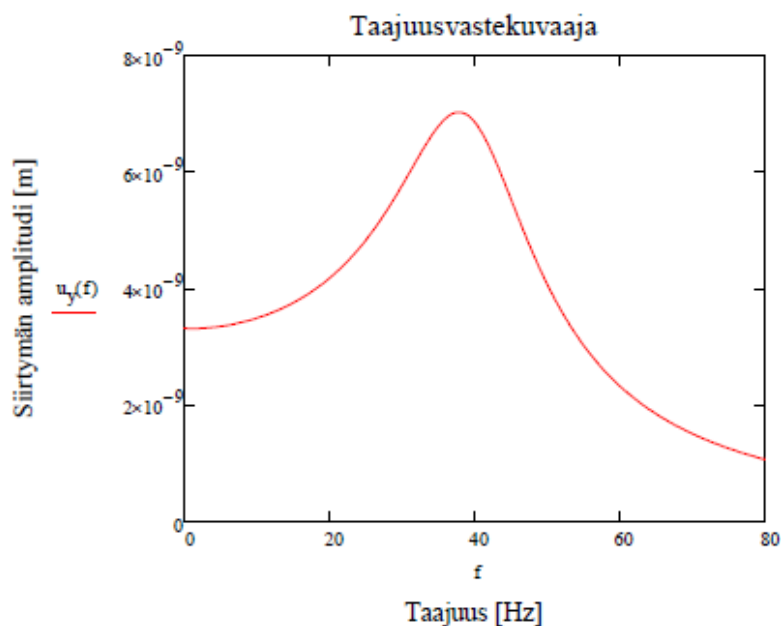
$$f := 0 \text{ Hz}, 0.01 \text{ Hz}.. 80 \text{ Hz}$$

Tarkasteltava taajuusalue

$$u_y(f) := \frac{F}{\sqrt{(K_{y,\text{dyn}} - m_p \cdot \omega(f)^2)^2 + \omega(f)^2 \cdot C_y^2}}$$

Siirtymä taajuuden funktiona

Oheinen taajuusvastekuvaaja on vain suuntaa antava. Siinä ei ole huomioitu Gazetasin korjauskertoimia. Siirtymien tarkka arvo on laskettava jokaisella taajuudella erikseen edellä esitetyillä kaavoilla.



### Vaakavärähtely, x-akselin suunta

$$k_x := 1.0$$

Dynaaminen jäykkyskerroin

$$K_x := K_y - \frac{0.2}{0.75 - \nu} \cdot G \cdot L \left( 1 - \frac{B}{L} \right) = 308571.4 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Staatinen jäykkyys

$$K_{x,\text{dyn}} := K_x \cdot k_x = 308571.4 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Dynaaminen jäykkyys

$$C_{x,\text{rad}} := \rho \cdot V_s \cdot A_b = 644 \cdot \text{kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$$

Säteilyvaimennuskerroin

$$C_x := C_{x,\text{rad}} + \frac{2 \cdot K_{x,\text{dyn}}}{\omega} \cdot \beta = 644 \cdot \text{kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$$

Kokonaisvaimennuskerroin

$$u_x := \frac{F}{\sqrt{(K_{x,\text{dyn}} - m_p \cdot \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot C_x^2}} = 0.006167 \cdot \mu\text{m}$$

Vaakavärähtelyn amplitudi

### Suuntaa antava taajuusvastekuvaaja

$$f := 0\text{Hz}, 0.01\text{Hz}, 80\text{Hz}$$

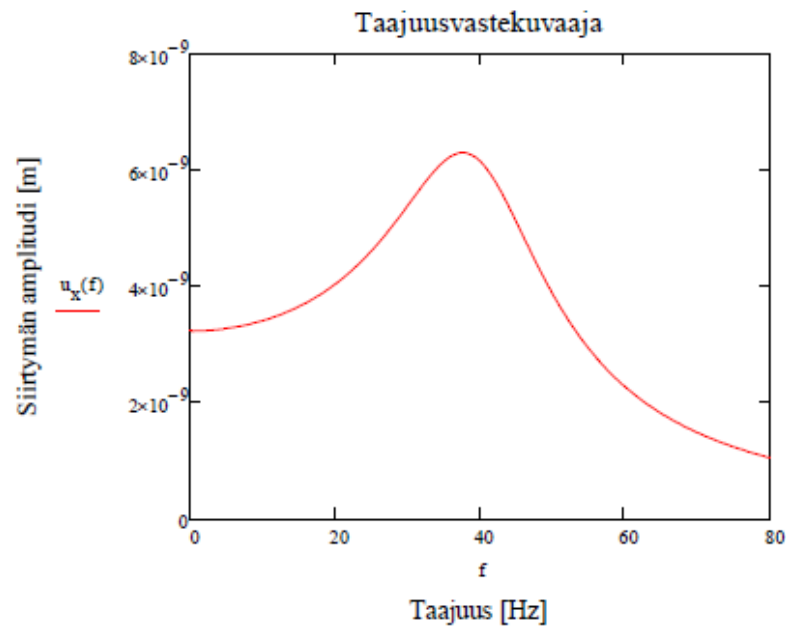
Tarkasteltava taajuusalue

$$u_x(f) := \frac{F}{\sqrt{(K_{x,\text{dyn}} - m_p \cdot \omega(f)^2)^2 + \omega(f)^2 \cdot C_x^2}}$$

Siirtymä taajuuden funktiona

Oheinen taajuusvastekuvaaja on vain suuntaa antava. Siinä ei ole huomioitu Gazetasin korjauskertoimia. Siirtymien tarkka arvo on laskettava jokaisella taajuudella erikseen edellä esitetyillä kaavoilla.





### Rotaatiovärehtely, x-akselin ympäri

$$c_{rx} := 0.1$$

Säteilyvaimennuksen korjauskerroin

$$K_{rx} := \frac{G}{1-\nu} \cdot I_{bx}^{0.75} \cdot \left(\frac{L}{B}\right)^{0.25} \cdot \left(2.4 + 0.5 \cdot \frac{B}{L}\right) = 103632.2 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

Staattinen jäykkyys

$$k_{rx} := 1 - 0.2 \cdot a_0 = 0.87$$

Dynaaminen jäykkyyskerroin

$$K_{rx,dyn} := K_{rx} \cdot k_{rx} = 89654.6 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

Dynaaminen jäykkyys

$$C_{rx,rad} := (\rho \cdot V_{La} \cdot I_{bx}) \cdot c_{rx} = 11.2 \cdot \text{kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}$$

Säteilyvaimennuskerroin

$$C_{rx} := C_{rx,rad} + \frac{2 \cdot K_{rx,dyn}}{\omega} \cdot \beta = 11.2 \cdot \text{kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}$$

Kokonaisvaimennuskerroin

$$\varphi_{rx} := \frac{M}{\sqrt{(K_{rx,dyn} - I_x \cdot \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot C_{rx}^2}} = 1.01 \times 10^{-8}$$

Kiertymän amplitudi

### Suuntaa antava taajuusvastekuvaaja

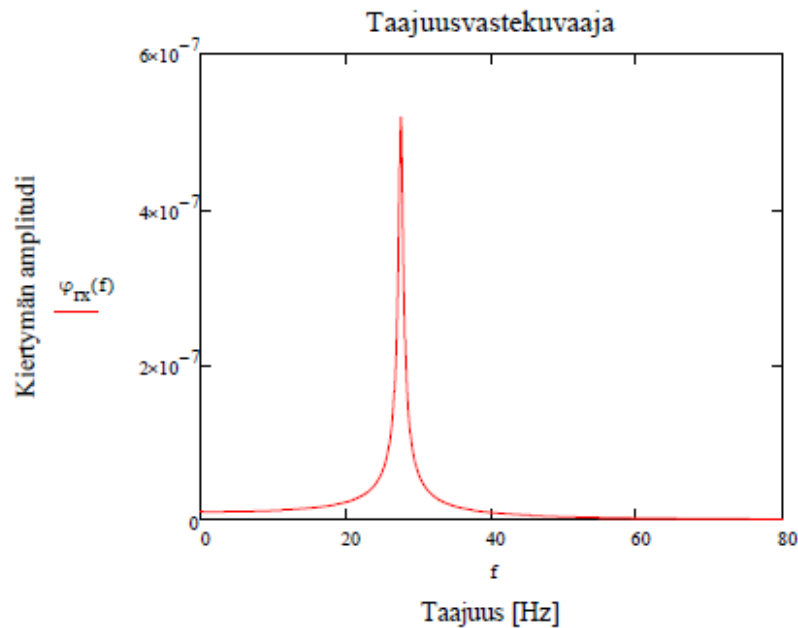
$$f := 0 \text{ Hz}, 0.01 \text{ Hz}, 80 \text{ Hz}$$

Tarkasteltava taajuusalue

$$\varphi_{rx}(f) := \frac{M}{\sqrt{(K_{rx,dyn} - I_x \cdot \omega(f)^2)^2 + \omega(f)^2 \cdot C_{rx}^2}}$$

Kiertymä taajuuden funktiona

Oheinen taajuusvastekuvaaja on vain suuntaa antava. Siinä ei ole huomioitu Gazetasin korjauskertoimia. Kiertymien tarkka arvo on laskettava jokaisella taajuudella erikseen edellä esitetyillä kaavoilla.



### Rotaatiovärehtely, y-akselin ympäri

$$c_{ry} := 0.1$$

Säteilyvaimennuksen korjauskertoin

$$K_{ry} := \frac{G}{1 - \nu} \cdot I_{by}^{0.75} \cdot \left[ 3 \cdot \left( \frac{L}{B} \right)^{0.15} \right] = 107205.7 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

Staattinen jäykkyys

$$k_{ry} := 1 - 0.3 \cdot a_0 = 0.8 \quad \nu < 0.45$$

Dynaaminen jäykkyyserkoin

$$K_{ry,dyn} := K_{ry} \cdot k_{ry} = 85516.4 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

Dynaaminen jäykkyys

$$C_{ry,rad} := (\rho \cdot V_{La} \cdot I_{by}) \cdot c_{ry} = 11.2 \cdot \text{kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}$$

Säteilyvaimennuskertoin

$$C_{ry} := C_{ry,rad} + \frac{2 \cdot K_{ry,dyn}}{\omega} \cdot \beta = 11.2 \cdot \text{kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}$$

Kokonaisvaimennuskertoin

$$\varphi_{ry} := \frac{M}{\sqrt{(K_{ry,dyn} - I_y \cdot \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot C_{ry}^2}} = 9.66 \times 10^{-9}$$

Kiertymän amplitudi

### Suuntaa antava taajuusvastekuvaaja

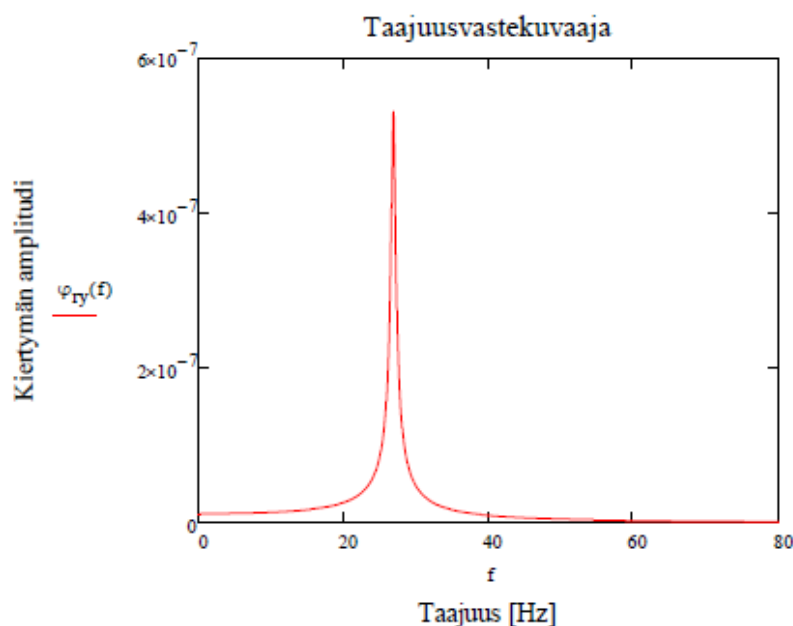
$$f := 0 \text{ Hz}, 0.01 \text{ Hz}, 80 \text{ Hz}$$

Tarkasteltava taajuusalue

$$\varphi_{ry}(f) := \frac{M}{\sqrt{(K_{ry,dyn} - I_y \cdot \omega(f)^2)^2 + \omega(f)^2 \cdot C_{ry}^2}}$$

Kiertymä taajuuden funktiona

Oheinen taajuusvastekuvaaja on vain suuntaa antava. Siinä ei ole huomioitu Gazetasin korjauskertoimia. Kiertymien tarkka arvo on laskettava jokaisella taajuudella erikseen edellä esitetyillä kaavoilla.



## 2. Upotettu perustus

### Lähtötiedot

#### Perustuksen geometria

Huomaa, että alla esitetyt perustuksen geometristen ominaisuuksien kaavat ovat voimassa vain suorakulmaisille perustuksille.

$$D := 1.24 \text{ m}$$

$$d := \frac{2}{3} \cdot 1.24 \text{ m}$$

$$h := D - \frac{d}{2} = 0.826667 \text{ m}$$

$$A_w := 2 \cdot (2L + 2B) \cdot d = 3.968 \text{ m}^2$$

$$A_{w,y} := 2 \cdot 2B \cdot d = 1.984 \text{ m}^2$$

$$A_{w,x} := 2 \cdot 2L \cdot d = 1.984 \text{ m}^2$$

$$I_{w,y} := 2 \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot 2B \cdot d^3 + \frac{1}{12} \cdot (2B)^3 \cdot d \right] = 0.69 \text{ m}^4$$

$$I_{w,x} := 2 \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot 2L \cdot d^3 + \frac{1}{12} \cdot (2L)^3 \cdot d \right] = 0.69 \text{ m}^4$$

$$I_{w,x} := 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2L \cdot d^3 = 0.4519 \text{ m}^4$$

Perustuksen pohjan etäisyys maanpinnasta

Keskimääräinen sivuseinän korkeus, jolla hyvä maakontakti

Tehokkaiden sivuseinien painopisteen etäisyys maanpinnasta

Perustuksen sivuseinien ja maan välinen kontaktipinta

Y-akselin suuntaisten sivuseinien ja maan välinen kontaktipinta

X-akselin suuntaisten sivuseinien ja maan välinen kontaktipinta

Y-akselin suuntaisten sivuseinien polaaristen neliömomenttien summa perustustasossa sijaitsevan, x-akselin suuntaisen akselin ympäri

X-akselin suuntaisten sivuseinien polaaristen neliömomenttien summa perustustasossa sijaitsevan, y-akselin suuntaisen akselin ympäri

X-akselin suuntaisten sivuseinien neliömomenttien summa niiden perustustasossa sijaitsevan, x-akselin suuntaisen akselin ympäri

$$I_{w,y} := 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2B \cdot d^3 = 0.4519 \text{ m}^4$$

Y-akselin suuntaisten sivuseinién  
neliömomenttien summa niiden  
perustustasossa sijaitsevan, y-akselin  
suuntaisen akselin ympäri

Pystyvärähtely, z-akselin suunta

$$K_{z,emb} := K_z \cdot \left[ 1 + \frac{1}{21} \cdot \frac{D}{B} \cdot \left( 1 + 1.3 \cdot \frac{A_b}{4L^2} \right) \right] \cdot \left[ 1 + 0.2 \cdot \left( \frac{A_w}{A_b} \right)^{\frac{2}{3}} \right] = 620500.6 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad \text{Staattinen jäykkyys}$$

$$k_{z,emb,1} := k_z \cdot \left[ 1 - 0.09 \cdot \left( \frac{D}{B} \right)^{\frac{3}{4}} \cdot a_0^2 \right] = 0.89$$

Dynaaminen jäykkyyserroin kokonaan  
upotetulle perustukselle

$$k_{z,emb,2} := k_z \cdot \left[ 1 + 0.09 \cdot \left( \frac{D}{B} \right)^{\frac{3}{4}} \cdot a_0^2 \right] = 1.03$$

Dynaaminen jäykkyyserroin avoimessa  
kaivannossa olevalle perustukselle

$$k_{z,emb} := \frac{d \cdot k_{z,emb,1} + (D - d) \cdot k_{z,emb,2}}{D} = 0.94$$

Dynaaminen jäykkyyserroin

$$K_{z,emb,dyn} := K_{z,emb} \cdot k_{z,emb} = 581671.8 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Dynaaminen jäykkyys

$$C_{z,emb,rad} := C_{z,rad} + \rho \cdot V_s \cdot A_w = 2638.8 \cdot \text{kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$$

Säteilyvaimennuserroin

$$C_{z,emb} := C_{z,emb,rad} + \frac{2 \cdot K_{z,emb,dyn}}{\omega} \cdot \beta = 2638.8 \cdot \text{kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$$

Kokonaisvaimennuserroin

$$u_{z,emb} := \frac{F}{\sqrt{(K_{z,emb,dyn} - m_p \cdot \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot C_{z,emb}^2}} = 0.001387 \cdot \mu\text{m}$$

Pystyvärähtelyn amplitudi

Suuntaa antava taajuusvastekuvaaja

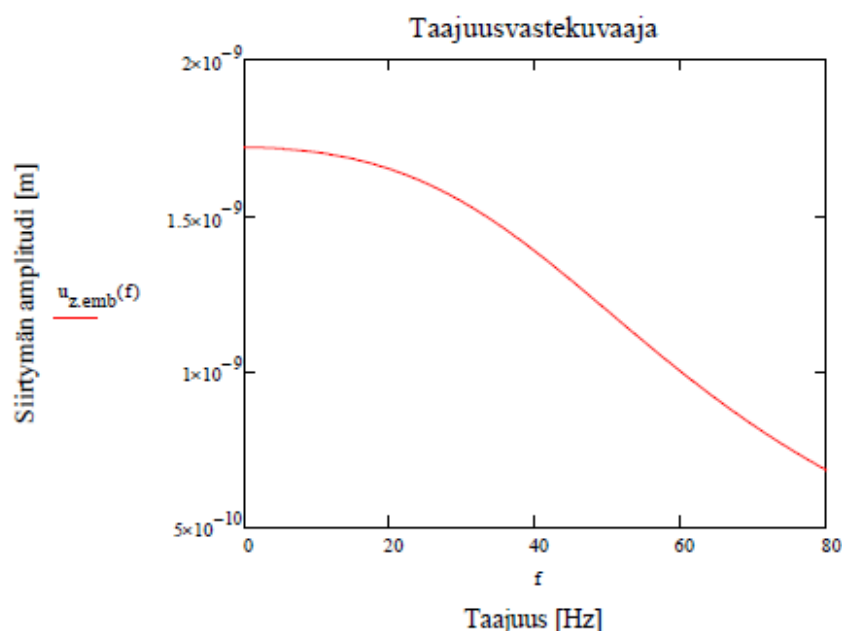
$$f := 0\text{Hz}, 0.01\text{Hz}..80\text{Hz}$$

Tarkasteltava taajuusalue

$$u_{z,emb}(f) := \frac{F}{\sqrt{(K_{z,emb,dyn} - m_p \cdot \omega(f)^2)^2 + \omega(f)^2 \cdot C_{z,emb}^2}}$$

Siirtymä taajuuden funktiona

Oheinen taajuusvastekuvaaja on vain suuntaa antava. Siinä ei ole huomioitu Gazetasin korjauskertoimia. Siirtymien tarkka arvo on laskettava jokaisella taajuudella erikseen edellä esitetyillä kaavoilla.



Vaakavärähtely, y-akselin suunta

$$k_{y,emb} := 0.90$$

Dynaaminen jäykkyyserroin

$$K_{y,emb} := K_y \cdot \left( 1 + 0.15 \cdot \sqrt{\frac{D}{B}} \right) \cdot \left[ 1 + 0.52 \cdot \left( \frac{h}{B} \cdot \frac{A_w}{L^2} \right)^{0.4} \right] = 954197.1 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Staatinen jäykkyys

$$K_{y,emb,dyn} := K_{y,emb} \cdot k_{y,emb} = 858777.4 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Dynaaminen jäykkyys

$$C_{y,emb,rad} := C_{y,rad} + \rho \cdot V_s \cdot A_{w,y} + \rho \cdot V_{La} \cdot A_{w,x} = 2747.2 \cdot \text{kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$$

Säteilyvaimennuserroin

$$C_{y,emb} := C_{y,emb,rad} + \frac{2 \cdot K_{y,emb,dyn}}{\omega} \cdot \beta = 2747.2 \cdot \text{kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$$

Kokonaisvaimennuserroin

$$u_{y,emb} := \frac{F}{\sqrt{(K_{y,emb,dyn} - m_p \cdot \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot C_{y,emb}^2}} = 0.001125 \cdot \mu\text{m}$$

Vaakavärähtelyn amplitudi

Suuntaa antava taajuusvastekuvaaja

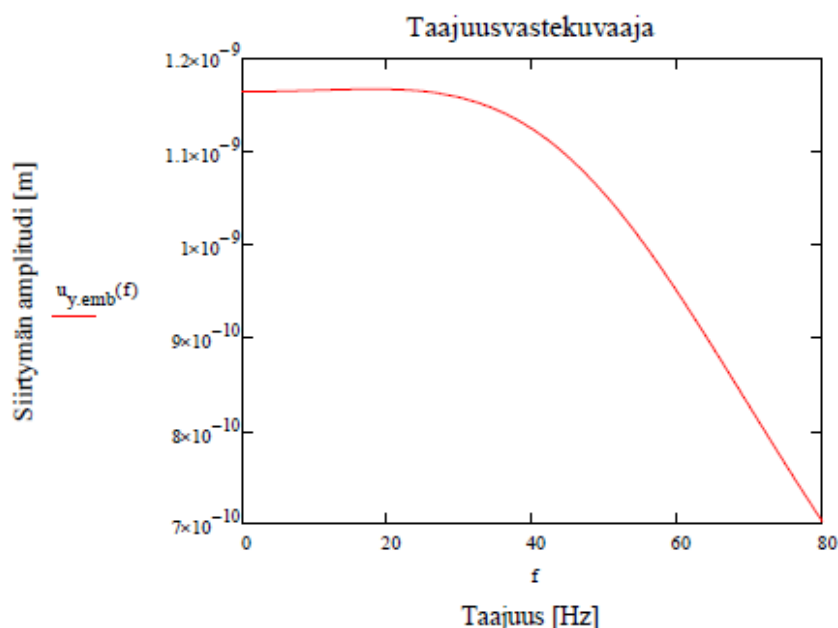
$$f := 0\text{Hz}, 0.01\text{Hz}..80\text{Hz}$$

Tarkasteltava taajuusalue

$$u_{y,emb}(f) := \frac{F}{\sqrt{(K_{y,emb,dyn} - m_p \cdot \omega(f)^2)^2 + \omega(f)^2 \cdot C_{y,emb}^2}}$$

Siirtymä taajuuden funktiona

Oheinen taajuusvastekuvaaja on vain suuntaa antava. Siinä ei ole huomioitu Gazetasin korjauskertoimia. Siirtymien tarkka arvo on laskettava jokaisella taajuudella erikseen edellä esitetyillä kaavoilla.



Vaakavärähtely, x-akselin suunta

$$k_{x,emb} := 0.90$$

Dynaaminen jäykkyskerroin

$$K_{x,emb} := K_x \cdot \left(1 + 0.15 \cdot \sqrt{\frac{D}{B}}\right) \cdot \left[1 + 0.52 \cdot \left(\frac{h}{B} \cdot \frac{A_w}{L^2}\right)^{0.4}\right] = 954197.1 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad \text{Staatinen jäykkyys}$$

$$K_{x,emb,dyn} := K_{x,emb} \cdot k_{x,emb} = 858777.4 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad \text{Dynaaminen jäykkyys}$$

$$C_{x,emb,rad} := C_{x,rad} + \rho \cdot V_s \cdot A_{w,x} + \rho \cdot V_{La} \cdot A_{w,y} = 2811.6 \cdot \text{kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{Säteilyvaimennuskerroin}$$

$$C_{x,emb} := C_{x,emb,rad} + \frac{2 \cdot K_{x,emb,dyn}}{\omega} \cdot \beta = 2811.6 \cdot \text{kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{Kokonaisvaimennuskerroin}$$

$$u_{x,emb} := \frac{F}{\sqrt{(K_{x,emb,dyn} - m_p \cdot \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot C_{x,emb}^2}} = 0.001109 \cdot \mu\text{m}$$

Vaakavärähtelyn amplitudi

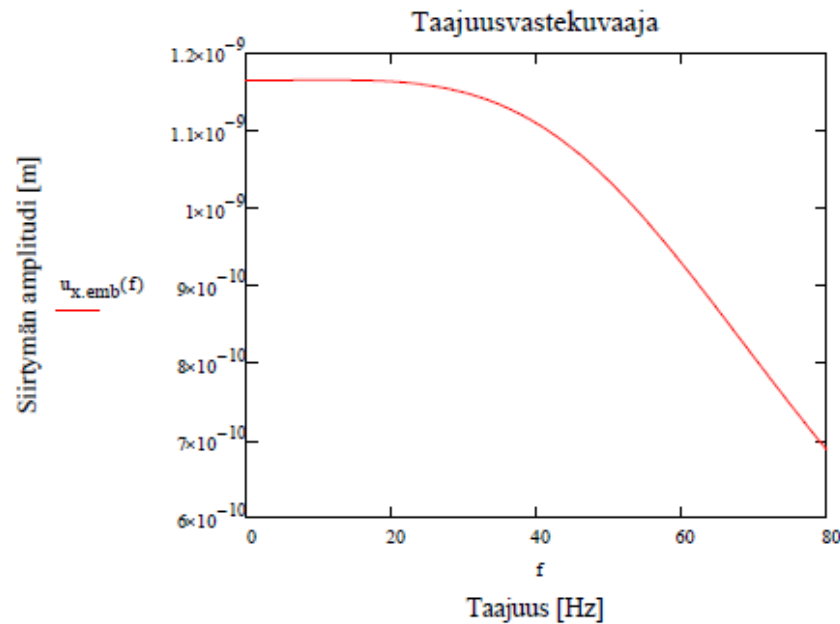
Suuntaa antava taajuusvastekuvaaja

$$f := 0\text{Hz}, 0.01\text{Hz}, 80\text{Hz}$$

Tarkasteltava taajuusalue

$$u_{x,emb}(f) := \frac{F}{\sqrt{(K_{x,emb,dyn} - m_p \cdot \omega(f)^2)^2 + \omega(f)^2 \cdot C_{x,emb}^2}} \quad \text{Siirtymä taajuuden funktiona}$$

Oheinen taajuusvastekuvaaja on vain suuntaa antava. Siinä ei ole huomioitu Gazetasin korjauskertoimia. Siirtymien tarkka arvo on laskettava jokaisella taajuudella erikseen edellä esitetyillä kaavoilla.



### Rotaatiovärähtely, x-akselin ympäri

$$K_{rx,emb} := K_{rx} \cdot \left[ 1 + 1.26 \cdot \frac{d}{B} \cdot \left[ 1 + \frac{d}{B} \cdot \left( \frac{d}{D} \right)^{-0.2} \cdot \sqrt{\frac{B}{L}} \right] \right] = 552345.3 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

Staattinen jäykkyys

$$k_{rx,emb} := k_{rx} = 0.87$$

Dynaaminen jäykkyskerroin

$$K_{rx,emb,dyn} := K_{rx,emb} \cdot k_{rx,emb} = 477846.9 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

Dynaaminen jäykkyys

$$\Delta_x := A_{w,x} \cdot B^2 = 0.71424 \cdot \text{m}^4$$

X-akselin suuntaisten sivujen ala  
kerrottuna sivujen x-akselin etäisyyden  
neliöllä

$$c_1 := 0.25 + 0.65 \cdot \sqrt{a_0} \cdot \left( \frac{d}{D} \right)^2 \cdot \left( \frac{D}{B} \right)^{\frac{-1}{4}} = 0.76$$

Apukeroin

$$C_{rx,emb,rad} := C_{rx,rad} + \rho \cdot V_{La} \cdot I_{w,x} \cdot c_1 + \rho \cdot V_s \cdot (I_{w,y} + \Delta_x) \cdot c_1 = 710.5 \cdot \text{kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}$$

Säteilyvaimennuskerroin

$$C_{rx,emb} := C_{rx,emb,rad} + \frac{2 \cdot K_{rx,emb,dyn}}{\omega} \cdot \beta = 710.473295 \cdot \text{kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}$$

Kokonaisvaimennuskerroin

$$\varphi_{rx,emb} := \frac{M}{\sqrt{(K_{rx,emb,dyn} - J_x \cdot \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot C_{rx,emb}^2}} = 2.95 \times 10^{-9}$$

Kiertymän amplitudi

### Suuntaa antava taajuusvastekuvaaja

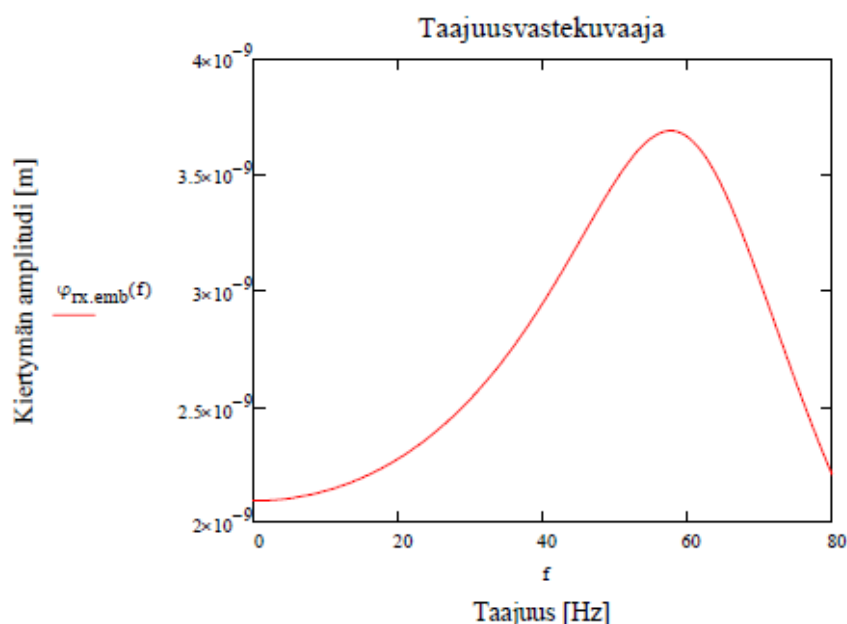
$$f := 0 \text{ Hz}, 0.01 \text{ Hz}..80 \text{ Hz}$$

Tarkasteltava taajuusalue

$$\varphi_{rx,emb}(f) := \frac{M}{\sqrt{(K_{rx,emb,dyn} - J_x \cdot \omega(f)^2)^2 + \omega(f)^2 \cdot C_{rx,emb}^2}}$$

Kiertymä taajuuden funktiona

Oheinen taajuusvastekuvaaja on vain suuntaa antava. Siinä ei ole huomioitu Gazetasin korjauskertoimia. Kiertymien tarkka arvo on laskettava jokaisella arvolla erikseen edellä esitetyillä kaavoilla.



### Rotaatiovärähtely, y-akselin ympäri

$$K_{ry,emb} := K_{ry} \left[ 1 + 0.92 \cdot \left( \frac{d}{L} \right)^{0.6} \left[ 1.5 + \left( \frac{d}{L} \right)^{1.9} \cdot \left( \frac{d}{D} \right)^{-0.6} \right] \right] = 566806.1 \cdot \text{kN} \cdot \text{m} \quad \text{Staatinen jäykkyys}$$

$$k_{ry,emb} := k_{ry} = 0.8 \quad \text{Dynaaminen jäykkyskerroin}$$

$$K_{ry,emb,dyn} := K_{ry,emb} \cdot k_{ry,emb} = 452132.9 \cdot \text{kN} \cdot \text{m} \quad \text{Dynaaminen jäykkyys}$$

$$\Delta_y := A_{w,y} L^2 = 0.71424 \text{ m}^4 \quad \text{Y-akselin suuntaisten sivujen ala kerrottuna sivujen y-akselin etäisyyden neliöllä}$$

$$c_1 := 0.25 + 0.65 \cdot \sqrt{a_0} \cdot \left( \frac{d}{D} \right)^2 \cdot \left( \frac{D}{L} \right)^4 = 0.76 \quad \text{Apukeroin}$$

$$C_{ry,emb,rad} := C_{ry,rad} + \rho \cdot V_{La} \cdot I_{w,y} \cdot c_1 + \rho \cdot V_s \cdot (I_{w,x} + \Delta_y) \cdot c_1 = 710.5 \cdot \text{kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m} \quad \text{Säteilyvaimennuskerroin}$$

$$C_{ry,emb} := C_{ry,emb,rad} + \frac{2 \cdot K_{ry,emb,dyn}}{\omega} \cdot \beta = 710.5 \cdot \text{kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m} \quad \text{Kokonaisvaimennuskerroin}$$

$$\varphi_{ry,emb} := \frac{M}{\sqrt{(K_{ry,emb,dyn} - J_y \cdot \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot C_{ry,emb}^2}} = 3.14 \times 10^{-9} \quad \text{Kiertymän amplitudi}$$

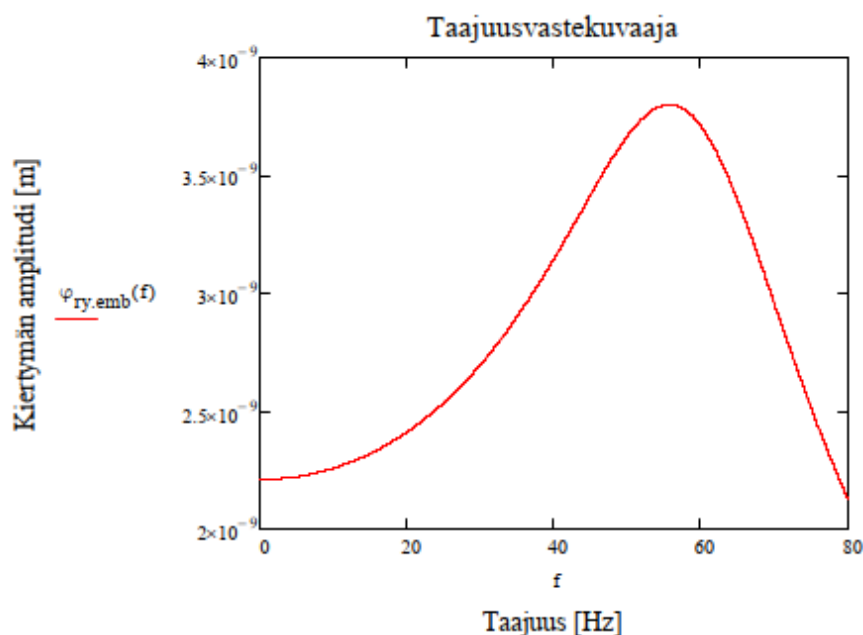
### Suuntaa antava taajuusvastekuvaaja

$$f := 0 \text{ Hz}, 0.01 \text{ Hz}.. 80 \text{ Hz} \quad \text{Tarkasteltava taajuusalue}$$

$$\varphi_{ry,emb}(f) := \frac{M}{\sqrt{(K_{ry,emb,dyn} - J_y \cdot \omega(f)^2)^2 + \omega(f)^2 \cdot C_{ry,emb}^2}} \quad \text{Kiertymä taajuuden funktiona}$$



Oheinen taajuusvastekuvaaja on vain suuntaa antava. Siinä ei ole huomioitu Gazetasin korjauskertoimia. Kiertymien tarkka arvo on laskettava jokaisella arvolla erikseen edellä esitetyillä kaavoilla.



Kytkeyty vaaka- ja rotaatiovärähtely, y-akselin suuntaisesti & x-akselin ympäri

$$z_c := \frac{H}{2} = 0.62 \text{ m}$$

Perustuksen painopisteen etäisyys  
perustuksen pohjasta

$$K_{ytx.emb} := \frac{1}{3} \cdot d \cdot K_{y.emb} = 262934.3 \cdot \text{kN}$$

Staatinen jäykkyys

$$k_{ytx.emb} := 1.0$$

Dynaaminen jäykkyskerroin

$$K_{ytx.emb.dyn} := K_{ytx.emb} \cdot k_{ytx.emb} = 262934.3 \cdot \text{kN}$$

Dynaaminen jäykkyys

$$C_{ytx.emb.rad} := \frac{1}{3} \cdot d \cdot C_{y.emb} = 757 \cdot \text{kN} \cdot \text{s}$$

Säteilyvaimennuskerroin

$$C_{ytx.emb} := C_{ytx.emb.rad} + \frac{2 \cdot K_{ytx.emb.dyn}}{\omega} \cdot \beta = 757 \cdot \text{kN} \cdot \text{s}$$

Kokonaisvaimennuskerroin

$$I_{0x} := \frac{1}{12} \cdot m_p \cdot [(2B)^2 + H^2] = 1174 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Hitausmomentti x-akselin suuntaisen  
akselin ympäri, joka sijaitsee  
perustuksen massakeskipisteessä

$$B_{11} := \sqrt{(K_{y.emb.dyn} - m_p \cdot \omega^2)^2 + (C_{y.emb} \cdot \omega)^2}$$

$$B_{12} := \sqrt{K_{ytx.emb.dyn}^2 + (C_{ytx.emb} \cdot \omega)^2} - \sqrt{K_{y.emb.dyn}^2 + (C_{y.emb} \cdot \omega)^2} \cdot z_c$$

$$B_{22} := \sqrt{(K_{tx.emb.dyn} - I_{0x} \cdot \omega^2)^2 + (C_{tx.emb} \cdot \omega)^2} + \sqrt{K_{y.emb.dyn}^2 + (C_{y.emb} \cdot \omega)^2} \cdot z_c^2 \dots$$

$$+ [-2 \cdot \sqrt{K_{ytx.emb.dyn}^2 + (C_{ytx.emb} \cdot \omega)^2} \cdot z_c]$$

$$N := B_{11} \cdot B_{22} - B_{12}^2$$

$$v_{y.c} := (B_{22} \cdot F - B_{12} \cdot M) \cdot N^{-1} = 0.002906 \cdot \mu\text{m}$$

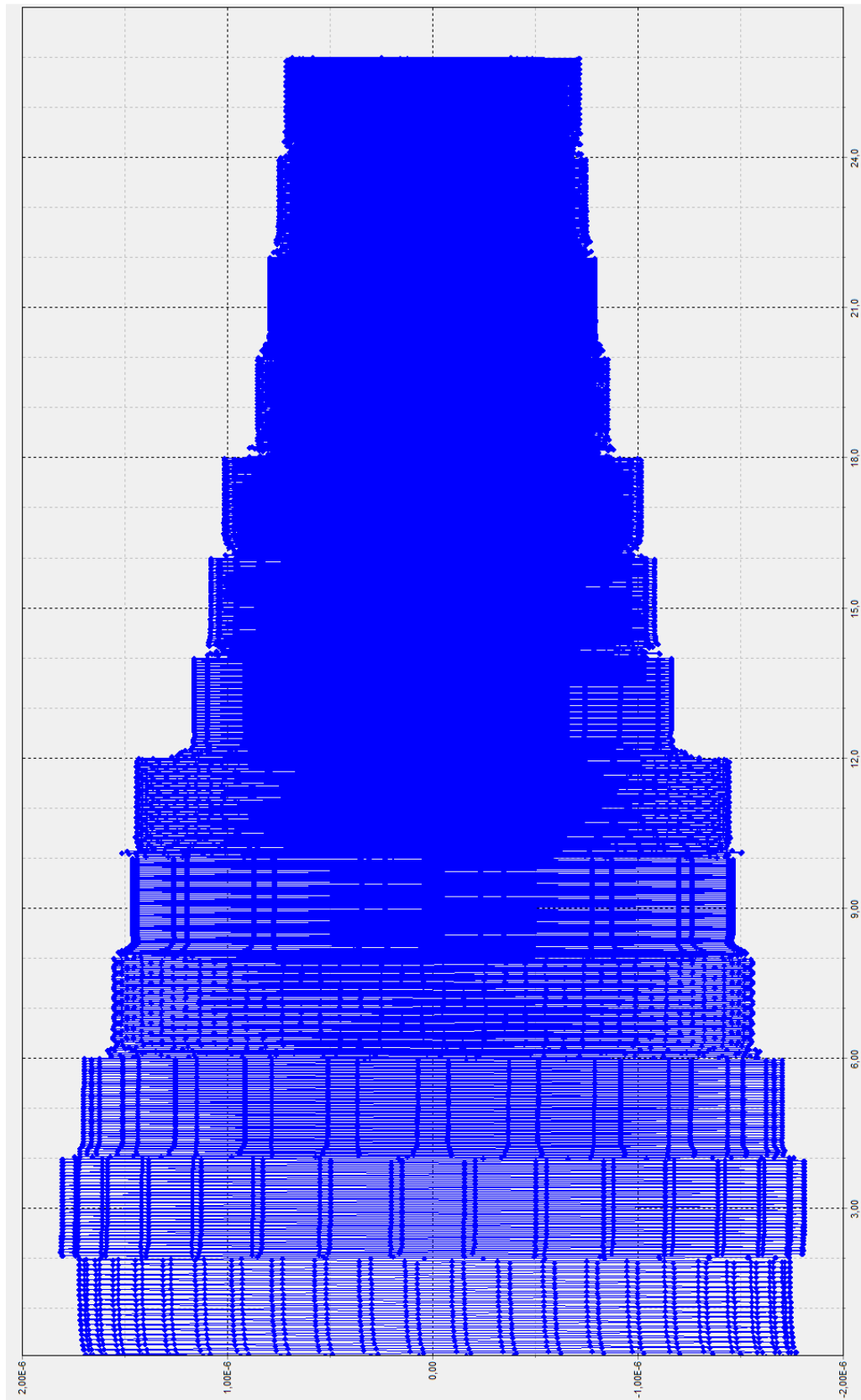
Perustuksen keskipisteen siirtymän  
amplitudi

$$\varphi_{rx.c} := (B_{11} \cdot M - B_{12} \cdot F) \cdot N^{-1} = 4.42 \times 10^{-9}$$

Perustuksen keskipisteen kiertymän  
amplitudi

Kytkeyty vaaka- ja rotaatiovärähtely, x-akselin suuntaisesti & y-akselin ympäri

$K_{xry.emb} := \frac{1}{3} \cdot d \cdot K_{x.emb} = 262934.3 \cdot \text{kN}$	Staattinen jäykkyys
$k_{xry.emb} := 1.0$	Dynaaminen jäykkyysskerroin
$K_{xry.emb.dyn} := K_{xry.emb} \cdot k_{xry.emb} = 262934.3 \cdot \text{kN}$	Dynaaminen jäykkyys
$C_{xry.emb.rad} := \frac{1}{3} \cdot d \cdot C_{x.emb} = 774.8 \cdot \text{kN} \cdot \text{s}$	Säteilyvaimennuskerroin
$C_{xry.emb} := C_{xry.emb.rad} + \frac{2 \cdot K_{xry.emb.dyn}}{\omega} \cdot \beta = 774.8 \cdot \text{kN} \cdot \text{s}$	Kokonaisvaimennuskerroin
$I_{0y} := \frac{1}{12} \cdot m_p \cdot [(2L)^2 + H^2] = 1174 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2$	Hitausmomentti y-akselin suuntaisen akselin ympäri, joka sijaitsee perustuksen massakeskipisteessä
$B_{11} := \sqrt{(K_{x.emb.dyn} - m_p \cdot \omega^2)^2 + (C_{x.emb} \cdot \omega)^2}$	
$B_{12} := \sqrt{K_{xry.emb.dyn}^2 + (C_{xry.emb} \cdot \omega)^2} - \sqrt{K_{x.emb.dyn}^2 + (C_{x.emb} \cdot \omega)^2} \cdot z_c$	
$B_{22} := \sqrt{(K_{ry.emb.dyn} - I_{0y} \cdot \omega^2)^2 + (C_{ry.emb} \cdot \omega)^2} + \sqrt{K_{x.emb.dyn}^2 + (C_{x.emb} \cdot \omega)^2} \cdot z_c^2 \dots$ $+ [-2 \cdot \sqrt{K_{xry.emb.dyn}^2 + (C_{xry.emb} \cdot \omega)^2} \cdot z_c]$	
$N := B_{11} \cdot B_{22} - B_{12}^2$	
$v_{x,c} := (B_{22} \cdot F - B_{12} \cdot M) \cdot N^{-1} = 0.003024 \cdot \mu\text{m}$	Perustuksen keskipisteen siirtymän amplitudi
$\varphi_{ry,c} := (B_{11} \cdot M - B_{12} \cdot F) \cdot N^{-1} = 4.76 \times 10^{-9}$	Perustuksen keskipisteen kiertymän amplitudi

**LIITE B: PLAXIS 3D:N SIIRTYMÄVASTEKUVAAJA**

**Kuva 1.** Kokonaan upotetun perustuksen siirtymävasteet Plaxis 3D:lla